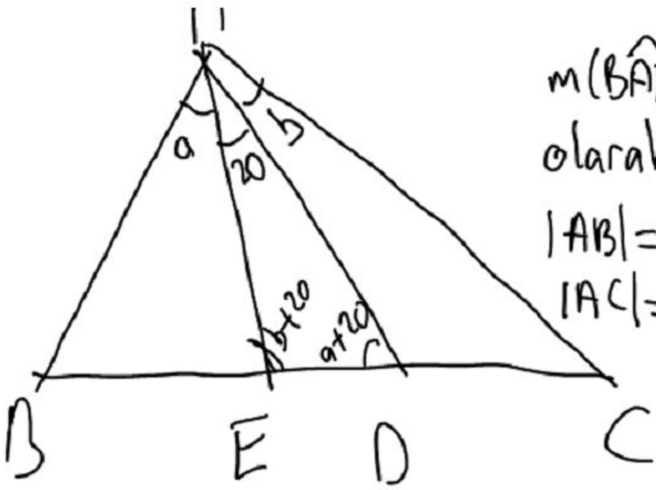
EMRE DENEME ÇÖZÜMLERİ

1.



$m(\widehat{BAE}) = a$ ve $m(\widehat{DAC}) = b$ olarak adlandırıldığında

$|AB| = |BD|$'den $m(\widehat{BDA}) = a+20$

$|AC| = |CE|$'den $m(\widehat{AEC}) = b+20$

olur. $\overset{\triangle}{AED}$ üçgeninin iç açılarından

$a+b = 120 \Rightarrow m(\widehat{BAC}) = 140^\circ$

$\Rightarrow$ (B)

2.

$$2020!\,(2022 \cdot 2021 - 2021 - 1) = 2020!\,[2021(2022-1) - 1]$$

$$= 2020! \cdot (2021 \cdot 2021 - 1) = 2020! \cdot 10k, \quad 10 \nmid k$$

De Polignac formülünden

$2020 \div 5 = 404$, $404 \div 5 = 80$, $80 \div 5 = 16$, $16 \div 5 = 3$

ve 10k'dan 1 tane 5 çarpanı

$404 + 80 + 16 + 3 + 1 = 504$

$\Rightarrow$ (B)

3.

$n=40$ dönüşümü uygulandığında

$A=\sqrt{n\cdot(n+4)(n+8)(n+12)+256}$ ifadesinde

$n\cdot(n+12)$ ve $(n+4)(n+8)$ öncelikli çarpılırsa

$A=\sqrt{(n^2+12n)\cdot(n^2+12n+32)+256}$ ifadesinde

$m=n^2+12n$ alınır. Böylece $A=\sqrt{m(m+32)+256}$

$\Rightarrow A=\sqrt{m^2+32m+256}=\sqrt{(m+16)^2}=m+16=n^2+12n+16$

$\Rightarrow A=40^2+12\cdot40+16=2096 \Rightarrow 2+0+9+6=17 \Rightarrow$ (C)

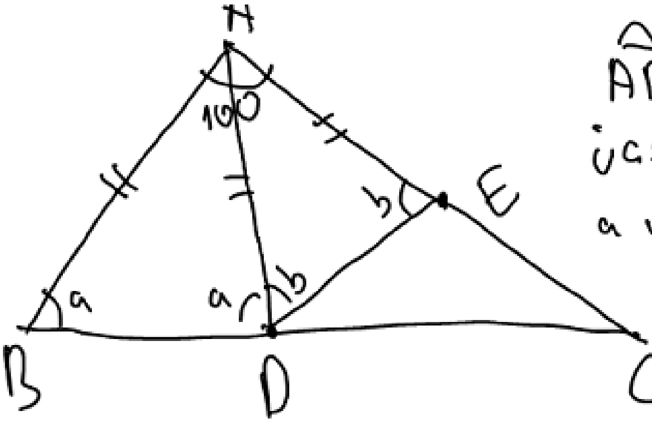
4.

Üçgen eşitsizliği gereği $a+b>c$ olmalıdır.

$5+x>y$ olmaması gerektiğinden ve en küçük değeri bulmak istediğimizden $x=6$ ve $y=11$ alınır. Bu sayı dizisi $a_n=a_{n-1}+a_{n-2}$ şeklinde oluşacaktır.

$5, 6, 11, 17, 28, 45, 73, 118 \Rightarrow$ (C)

5.



$\overset{\triangle}{ABD}$ ve $\overset{\triangle}{ADE}$ ikizkenar üçgenlerinin taban açıları a ve b olarak isimlendirildiğinde $m(\widehat{BAC}) = 100°$ olduğundan $m(\widehat{BDE}) = a+b = 130$ bulunur. Buradan $m(\widehat{EDC}) = 50°$ dir.

$\Rightarrow$ (D)

6.

Her bir elemanın bu çarpımda görülme sıklığı kaç alt kümede bulunduğu kadardır.

Buradan $1^{2^9} \cdot 2^{2^9} \cdot 3^{2^9} \cdots 10^{2^9} = (10!)^{2^9}$

$10! = A \cdot 10^k$, $10 \nmid A \Rightarrow 10 \begin{array}{|l} 5 \\ 2 \end{array} \Rightarrow k = 2$

$(A \cdot 10^2)^{2^9} = A \cdot 10^{2^{10}} \Rightarrow$ sondan 1024 basamağı sıfırdır. $\Rightarrow$ (E)

7.

$$\begin{array}{r} FGHEK \\ +\quad HEEK \\ \hline ABCADE \end{array}$$

F=9, A=1 olduğu hemen anlaşılıyor. E ise çift olmalıdır. Toplamın büyük olması istendiğinden, E'yi çok büyük olmak H'yi küçülteceğinden E'ye uygun çift sayılar denendiğinde E=4 için K=2 H=7 ve G=5 bulunur. Sayımız 163184'dir 11'e bölümünden kalan $-1+0-3+1-8+4=-7 \equiv 4 \pmod{11}$

$\Rightarrow$ (D)

8.

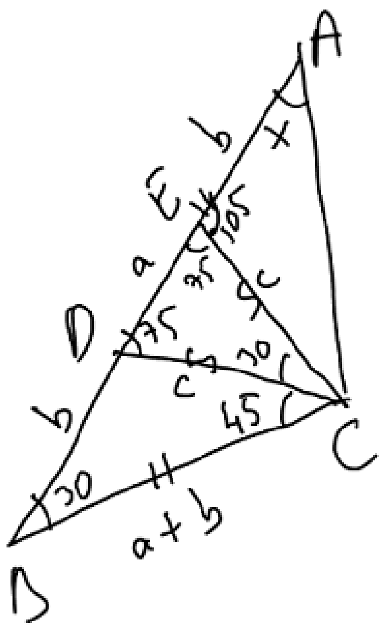
Kümenin elemanları toplamını ve eleman sayısını bölen 1'den büyük sayıları bulmak yeterli olacaktır. $2+3+4+\dots 25 = \frac{25.26}{2} - 1 = 324$

Eleman sayısı 24'tür. EBOB(24,324) = 12

12'nin 1'den büyük bölen sayısı 5'dir.

$\Rightarrow$ (B)

9.



[AD] üzerinde |DC|=|CE| 'yi sağlayacak şekilde bir E noktası alındığında $\overset{\triangle}{AEC} \cong \overset{\triangle}{BDC}$ gelir. $m(B\widehat{A}C) = 30°$

$\Rightarrow$ (B)

10.

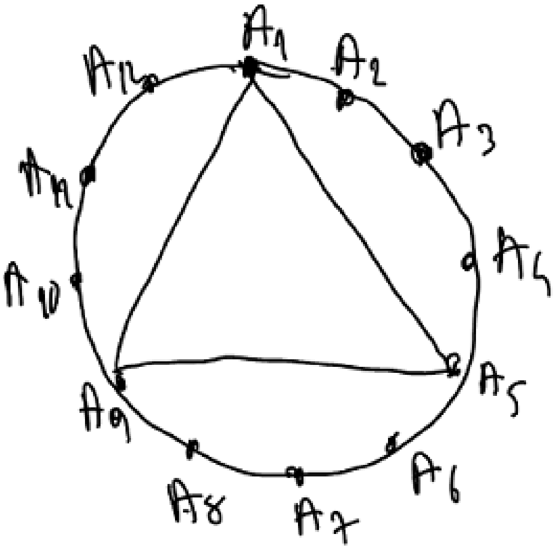
1,2,4,5,7,8 rakamlarıyla oluşturulabilecek 3'ile bölünemeyen sayıları bulmamız gerekiyor. 1 basamaklı 6 tane vardır. 2 basamaklı $6 \cdot 3 = 18$ tane 3 basamaklı $6 \cdot (3 \cdot 3 + 6 \cdot 3) = 162$ tane ve 4 basamaklı $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 + 3 \cdot 3 \cdot 6 = 81 + 54 = 135$ tane. Sonuç olarak

$6 + 18 + 162 + 135 = 321$ 'dir. $\Rightarrow$ (A)

11.

$n=1,2,3,\dots,11$ değerleri için $m=1,2,\dots 131$
e kadar tüm sayılar alınabilir.
$n=12$ için ise $m=134,135,\dots,154$ (21 tane)
$n=13$ için de benzer şekilde 21 tane
⋮
$n=44$ de kadar alınabilir. Buradan da $33\cdot 21=693$
$693+131=824 \Rightarrow$ (A)

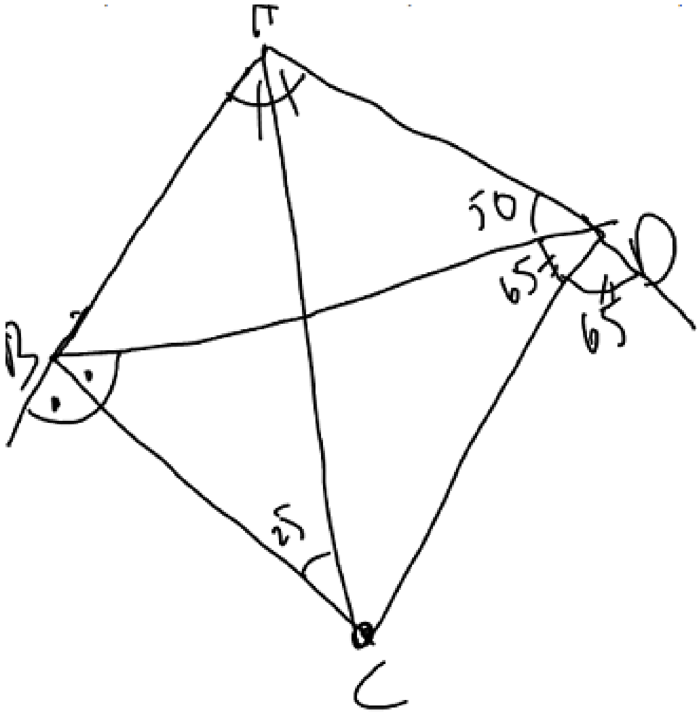
12.



Olası tüm üçgenlerin sayısı $\binom{12}{3}=220$
$(A_1A_5A_9)$ eşkenar üçgen oluşturabilecek 4 üçlü vardır.

$\frac{4}{220}=\frac{1}{55} \Rightarrow$ (A)

13.



C noktası $\overset{\triangle}{ABD}$ üçgeninde dış açıortayların kesim noktasıdır.

$\Rightarrow m(\widehat{BCA}) = \frac{50}{2} = 25$

$\Rightarrow$ (C)

14.

$\left(2020^{2019}\right)^{2020^{2019}} \equiv ? \pmod{17}$

Fermat'tan

$2020^{16} \equiv 1 \pmod{17}$

$2020^{2019 \cdot 2020^{2019}} \equiv ? \pmod{17}$

$2019 \cdot 2020^{2019} \equiv 0 \pmod{16} \Rightarrow 2020^{0} \equiv 1 \pmod{17}$

$\Rightarrow$ (E)

15.

$a_1+a_2+a_3 = a_1+a_1+r+a_1+2r = 3a_1+3r = 3(a_1+r) = 2019$

$\Rightarrow a_2 = a_1+r = 673$. Ayrıca üçgen eşitsizliğinden

$673-r+673 > 673+r \Rightarrow 673 > 2r \Rightarrow 336,5 > r$

r en çok 336 olabilir. $r = \underbrace{0,1,2,\dots 336}_{337 \text{ tane}}$

$\Rightarrow (C)$

16.

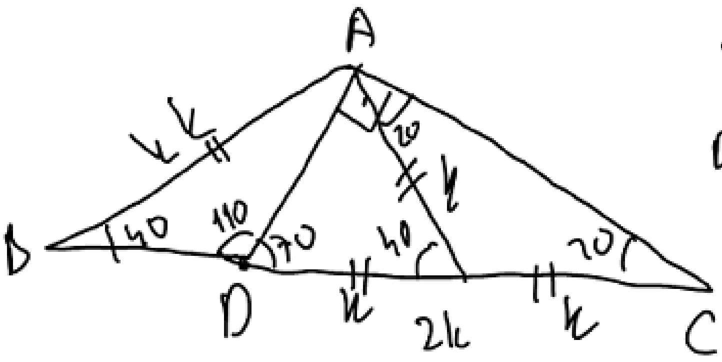
$\underbrace{a_1 a_2}, \underbrace{b_1 b_2}, \underbrace{c_1, c_2}, \underbrace{d, d, d}_{\text{boş 3 koltuk}}$

evli çiftler bir arada

Tekrarlı permütasyondan

$\frac{6!}{3!}\cdot 2\cdot 2\cdot 2 = 120\cdot 8 = 960 \Rightarrow (D)$

17.



$m(\widehat{DAC}) = 90°$ olduğundan

$\overset{\Delta}{DAC}$ dik üçgeninde $[DC]$'nin kenarortayı gelir. Kenarortay $[AB]$ ye eşit olduğundan

$m(\widehat{ABD}) = 40° \Rightarrow m(\widehat{BAD}) = 30°$

$\Rightarrow$ (C)

18.

$$\begin{array}{r|l} n^2 - n - 246 & n+2 \\ \cline{2-2} -\ n^2 + 2n & n-3 \\ \hline -3n - 246 & \\ -\ -3n - 6 & \\ \hline -240 & \end{array}$$

$$\frac{n^2 - n - 246}{n+2} = n - 3 - \frac{240}{n+2}$$

$n+2 \mid 240 = 2^4 . 3 . 5$

$5.2.2 = 20$ pozitif
20 negatif

$n+2$ her bir çarpana eşitlenip toplandığında $-2.40 = -80$ gelir
$\Rightarrow$ (A)

19.

$$a^2\cdot(2a+b) = b^2(b-a)$$

$$2a^3 + a^2b = b^3 - ab^2 \Rightarrow a^3 + a^2b - ab^2 = b^3 - a^3$$

$$a\,\cancel{(a^2+ab+b^2)} = (b-a)\cdot\cancel{(b^2+ab+a^2)}$$

$\Rightarrow a = b - a \Rightarrow b = 2a$ sağlayan (a,b)

ikilileri $(a,2a)$ şeklinde düşünülebilir.

$(1,2),(2,4)$ - - - $(1009,2018) \Rightarrow 1009$ tane

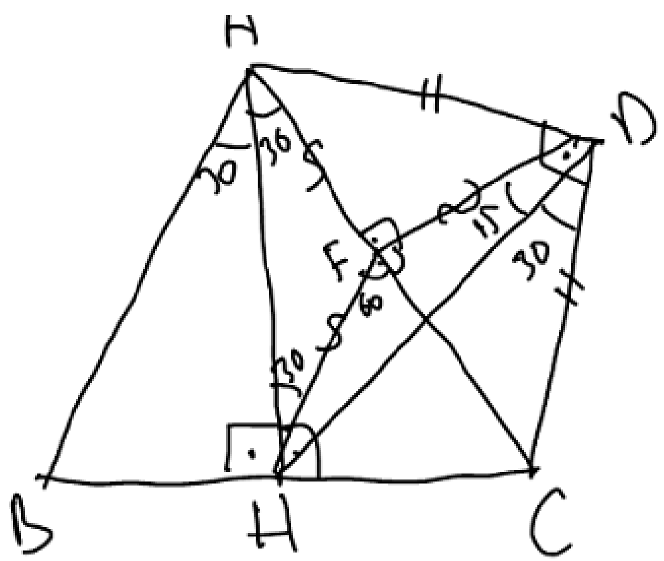
$\Rightarrow$ (B)

20.

$$\underline{5}\cdot\underline{6}\cdot\underline{6}\cdot\underline{6}\cdot\underline{6}\cdot\underline{6}\cdot\underline{6}\ \ \underline{2}$$

verilen rakamlar 3'e bölünmeleri bakımından simetrik olarak 2'li 3 gruba ayrılabilir. Bundan dolayı 8 basamaklı sayımızın 3'e bölünebilmesini sağlamak için birler basamağında 2 seçeneğimiz olacaktır. $10\cdot 6^6 \Rightarrow$ (B)

21.



D'dan AC'ye indirilen dikmenin ayağı F olsun. F noktası [AC]'nin orta noktası olduğundan

$|HF| = |AD| = |FC| = |DF|$

olur. Buradan $m(\widehat{HDC}) = 30^\circ$

$\Rightarrow$ (D)

22.

$(1+1)\cdot(1+2)\cdot(1+3) \ldots (1+19) - 1$ ifadesi bu toplamları vermektedir. Bu ise $20! - 1$'e eşittir.

$20! - 1 \equiv ?\ (\mathrm{mod}\ 23)$ Wilson teoreminden

$22! \equiv -1\ (\mathrm{mod}\ 23)$

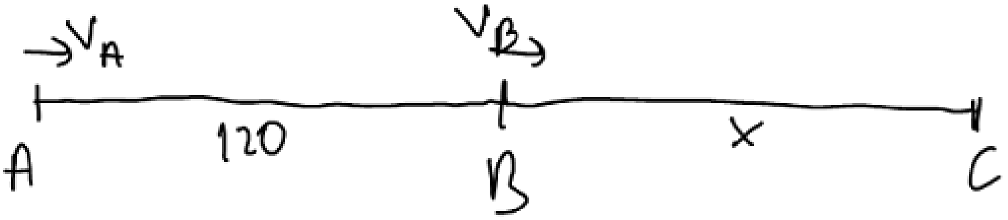
$\underbrace{22}_{-1} \cdot \underbrace{21}_{-2} \cdot 20! \equiv -1\ (\mathrm{mod}\ 23)$

$20! \equiv \frac{-1}{2} \equiv \frac{22}{2} \equiv 11\ (\mathrm{mod}\ 23)$

$11 - 1 \equiv 10\ (\mathrm{mod}\ 23)$

$\Rightarrow$ (C)

23.



$$\frac{120}{V_A - V_B} = t \quad ve \quad \frac{120}{(V_A+40)-(V_B+30)} = t-2$$, $V_A - V_B = k$ olsun

$\frac{120}{k} = t \quad \frac{120}{k+10} = t-2$ $\quad V_B = 60 \quad V_A = 80$

$120 = kt$, $120 = kt - 2k + 10t - 20 \Rightarrow k = 5t - 10$, $t = 6, k = 20$

$V_A = 80 \Rightarrow (E)$

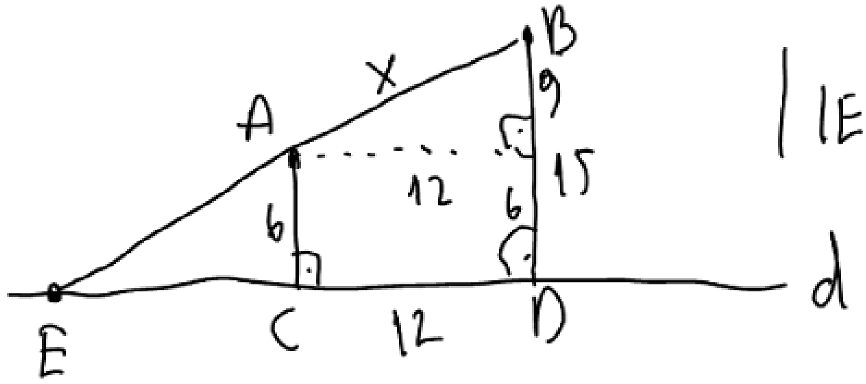
24.

Önce sessiz harfleri sıralayalım. 8 sesli harfin içinde 2 R ve 2 S harfini önce yer seçerek ilk R yi ilk S'den önce gelmesini sağlayalım. Daha sonra sesli harflerin yon yona gelmemesi için

$\cup \underline{B} \cup \underline{R} \cup \underline{S} \cup \underline{W} \cup \underline{L} \cup \underline{S} \cup \underline{T} \cup \underline{B} \cup$ sessiz harflerin arasındaki 9 yerden 2 yer seçeriz.

$$\binom{8}{4} \cdot \frac{3!}{2!} \cdot 4! \binom{9}{2} = \frac{9!}{2!} \Rightarrow (b)$$

25.



$$\big||EB|-|EA|\big| \le |AB|$$

$$\le 15$$

$$\Rightarrow (C)$$

26.

$A+32=36x$ ve $A+36=32y$ taraf tarafa çıkarıldığında $32y-36x=4 \Rightarrow 8y-9x=1$ denkleminin Öklit algoritmasıyla $x=-1+8k$, $y=-1+9k$ bulunur. $A=36(-1+8k)-32=288k-68$

$k=4$ için $A=1084 \Rightarrow 1+0+8+4=13 \Rightarrow (D)$

27.

$6x^2-36=xy+y^2 \Rightarrow 6x^2-xy-y^2=36$

$\underbrace{(3x+y)}_{k_1}\cdot\underbrace{(x-y)}_{k_2}=36$

$$\begin{array}{rl} & 3x+y=k_1 \\ + & x-y=k_2 \\ \hline & 4x=k_1+k_2 \Rightarrow 4 \mid k_1+k_2 \end{array}$$

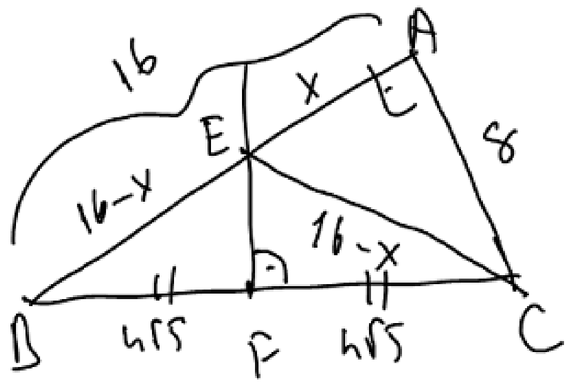
olduğundan 36'nın toplamları 4'le bölünebilen çarpanlarını bulmalıyız. $(k_1,k_2)=\{(18,2),(6,6)\} \Rightarrow$ 2 tane $\Rightarrow$ (C)

28.

En çok alanın en fazla alması için diğerleri mümkün olduğu kadar az almalıdır. En çok alan x alsın diğerleri y alsın.

$x+129y=2021$ ve $x+30y=536$ denklem sisteminde $y=15 \Rightarrow x=86 \Rightarrow$ (D)

29.



$\overset{\triangle}{ABC}$ üçgeninde Pisagor bağıntısı uygulandığında $|AC| = 8$'dir.
$\overset{\triangle}{AEC}$ üçgeninde Pisagor bağıntısı uygulandığında $|AE| = 6$'dır.

$\Rightarrow$ (D)

30.

Euler teoreminden $\Phi(32) = 2^5 - 2^4 = 16 \Rightarrow 2021^{16} \equiv 1 \pmod{32}$

$2020 \equiv 4 \pmod{16} \Rightarrow 2021^{2020} \equiv 2021^4 \equiv 5^4 \equiv 25 \cdot 25$

$\equiv (-7)\cdot(-7) \equiv 49 \equiv 17 \pmod{32} \Rightarrow$ (B)

31.

$3^x = a \Rightarrow 9a - \frac{10}{a} = 9 \Rightarrow 9a^2 - 9a - 10 = 0$

$\Rightarrow (3a-5)(3a+2) = 0 \Rightarrow a = \frac{5}{3}$ veya $a = -\frac{2}{3}$

$3^x \neq -\frac{2}{3} \Rightarrow 3^x = \frac{5}{3} \Rightarrow 3^{2x+3} = (3^x)^2 \cdot 27$

$= \frac{25}{9} \cdot 27 = 75$

$\Rightarrow$ (D)

32.

ilk yapılan listede 1 öğretmenin görülme sıklığı 6 olabilir. Her öğretmenin listede 6 kere görülebileceği düşünülecek olursa listenin uzunluğu $\frac{13 \cdot 6}{3} = 26$ olduğu görülür. $365 \div 26 = 14$, kalan 1 $\Rightarrow$ Bir öğretmen en çok $14 \cdot 6 + 1 = 85$ gün nöbet tutar. $\Rightarrow$ (A)

ALP DENEME ÇÖZÜMLERİ

1.

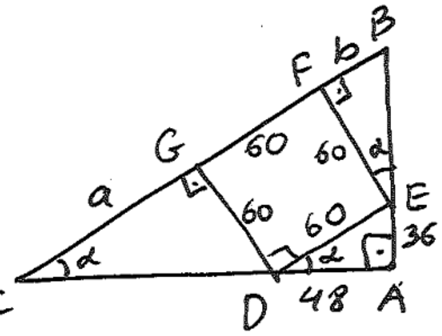
$\widehat{CGD} \sim \widehat{DAE} \Rightarrow \frac{a}{48} = \frac{60}{36} = \frac{5}{3} \Rightarrow a = 80$

$\widehat{BFE} \sim \widehat{EAD} \Rightarrow \frac{b}{36} = \frac{60}{48} = \frac{5}{4}$

$\Rightarrow b = 45$

$\Rightarrow |BC| = 80 + 60 + 45 = 185$

$\Rightarrow$ (C)



2.

$$A^2 = (10^{999} - 1)^2 = 10^{1998} - 2 \cdot 10^{999} + 1 =$$

$$\begin{array}{r} 1\overbrace{00\ldots00\ldots0}^{1998} \\ -\quad 2\underbrace{0\ldots0}_{999} \\ \hline \underbrace{9\ldots9}_{998}8\underbrace{0\ldots0}_{999} \end{array}$$

$$= \underbrace{99\ldots9}_{998}8\underbrace{0\ldots0}_{998}1$$

$\Rightarrow s(A^2) = 998 \cdot 9 + 8 + 1 =$

$= 999 \cdot 9 = 8991$

$\Rightarrow$ (b)

3.

$1+2003\cdot 2005 = 1+(2004-1)(2004+1) = 1+2004^2-1^2 = 2004^2$

$1+2002\cdot 2004 = 1+2003^2-1 = 2003^2$

$1+2001\cdot 2003 = 2002^2$

$1+2000\cdot 2002 = 2001^2 \Rightarrow A = 2001$

$\Rightarrow$ (b)

4.

$abc + acb + bac + bca + cab + cba =$

$= 200\cdot(a+b+c) + 20\cdot(a+b+c) + 2(a+b+c) =$

$= 222(a+b+c) = 1554 \Rightarrow a+b+c = 7$

$\Rightarrow (a,b,c) = (1,2,4) \Rightarrow c = 4$

$\Rightarrow$ (b)

5.

$|AC|^2 = |CH|\cdot|CB| = 8\cdot 10 = 80$

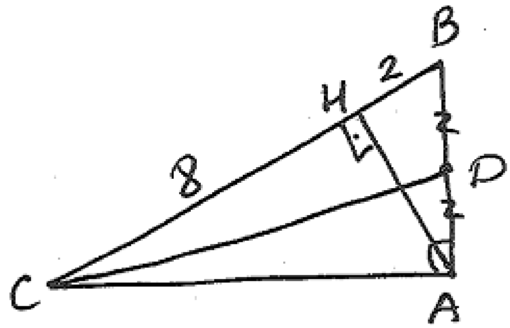
$|AB|^2 = |BH|\cdot|BC| = 2\cdot 10 = 20$

$\Rightarrow |AB| = 2\sqrt{5} \Rightarrow |AD| = \sqrt{5}$

$\Rightarrow |DC| = \sqrt{|CA|^2+|AD|^2}$

$= \sqrt{80+5} = \sqrt{85}$

$\Rightarrow$ (C)



6.

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=0 \Rightarrow \frac{yz+xz+xy}{xyz}=0 \Rightarrow yz+xz+xy=0$$

$$x^2+y^2+z^2=(x+y+z)^2-2(xy+xz+yz)=1^2-2\cdot 0=1$$

$\Rightarrow$ (b)

7.

$a_1=0;\ a_2=-1;\ a_3=1,\ a_4=-2,\ a_5=2,\dots \Rightarrow$

$a_{2n}<0;\ a_{2n+1}>0.\quad a_k=2008 \Rightarrow k=2n+1.$

$$\left.\begin{array}{l} \cancel{a_1}=0 \\ \cancel{a_2}=\cancel{a_1}-1 \\ \cancel{a_3}=a_2+2 \\ a_4=\cancel{a_3}-3 \\ \vdots \\ a_{2n+1}=\cancel{a_{2n}}+2n \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} a_{2n+1}=0\overbrace{-1+2}^{1}\overbrace{-3+4}^{1}+\dots+ \\ +2n-2\underbrace{-2n-1+2n}_{1}=n \\ 2008=a_k=a_{2n+1}=n \Rightarrow k=2n+1=4017 \end{array}$$

$\Rightarrow$ (c)

8.

3'e bölünen $\left[\!\left[\frac{1000}{3}\right]\!\right]=333$ sayı var.

Her ardısık 10 sayıdan biri 3 ile bitiyor

$\Rightarrow$ 3 ile biten 100 sayı bulunur.

3'e bölünen 3 ile biten ab3 sayısı için

$a+b=0$ (tek durum), $a+b=3$ (4 durum),

$a+b=6$ (7 durum), $a+b=9$ (10 durum), $a+b=12$ (7 durum),

$a+b=15$ (4 durum), $a+b=18$ (tek durum) $\Rightarrow$

toplam 34 durum çıkarılacak.

$333+100-34=399 \Rightarrow$ (e)

9.

$CE \perp AB$ çizelim $\Rightarrow$

$\overset{\triangle}{EDC}$ eşkenar üçgen $\Rightarrow$

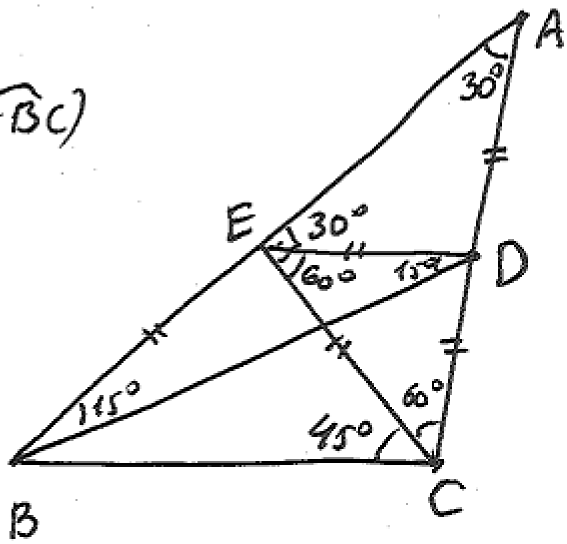
$m(\widehat{ECB}) = 105° - 60° = 45° = m(\widehat{EBC})$

$\Rightarrow |EB| = |EC| = |ED| \Rightarrow$

$m(\widehat{EBD}) = m(\widehat{EDB}) = 15° \Rightarrow$

$m(\widehat{DBC}) = 45° - 15° = 30°$

$\Rightarrow$ (d)



10.

$x + \sqrt{x} = n \in \mathbb{Z}$ olsun $\Rightarrow$ $y = \sqrt{x} \in \mathbb{Z}$ ve

$y^2 - y - n = 0$. Bu denklemin kökleri y_1 ve y_2

ise, $y_1 \cdot y_2 = -n$; $y_1 + y_2 = 1$ $\Rightarrow$ n sayısı,

$k = -y_2$ ve $k+1 = y_1$ sayılarının çarpımına

eşittir. $30 = 5 \cdot 6$; $90 = 9 \cdot 10$, $110 = 10 \cdot 11$,

$870 = 29 \cdot 30$ olduğundan $n = 30, 90, 110, 870$

olabilir. Diğer sayılar iki ardışık tam

sayının çarpımı şeklinde gösterilemez.

$\Rightarrow$ (d)

11.

$x = ky + kz$, $y = kx + kz$, $z = kx + ky$. Taraf tarafa topladığımızda $x+y+z = 2k(x+y+z) \Rightarrow$

1) $2k = 1 \Rightarrow \boxed{k = \frac{1}{2}}$ veya 2) $x+y+z = 0 \Rightarrow$

$x = -(y+z) \Rightarrow k = \frac{x}{y+z} = \frac{-(y+z)}{y+z} = \boxed{-1}$

Her iki durum gerçeklesebilir:

$x = y = z = 1 \Rightarrow k = \frac{1}{2}$ ve

$x = 2;\ y = z = -1 \Rightarrow \frac{2}{-1-1} = \frac{-1}{2-1} = \frac{-1}{2-1} = -1 = k$

$\Rightarrow$ (d)

12.

1'in ve 3'ün sağına 2 gelmek zorunda;

2'nin sağına 1 veya 3 gelebilir $\Rightarrow$

1) 1'le baslayanların sayısı:

1	1	2	1	2	1	2	1	2	1

$\rightarrow 2^4$ seçenek

2) 3'le baslayanlar:

1	1	2	1	2	1	2	1	2	1

$\rightarrow 2^4$ seçenek

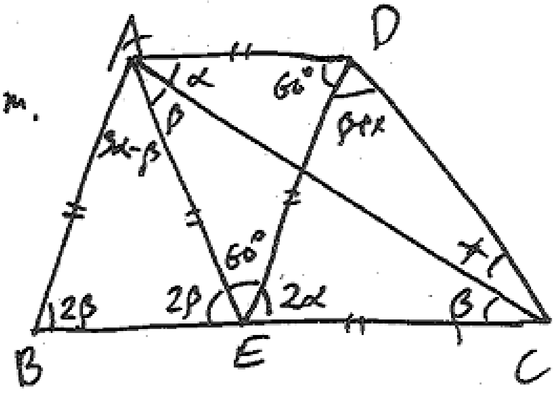
3) 2 ile baslayanlar:

1	2	1	2	1	2	1	2	1	2

$\rightarrow 2^5$ seçenek

$\Rightarrow$ Toplam $2^4 + 2^4 + 2^5 = 64$ seçenek

13.



$\widehat{ABC}$'den $3\alpha+3\beta=180^\circ \Rightarrow \alpha+\beta=60^\circ$

$m(\widehat{EAC})=\beta$ olacak şekilde E alalım.

$\Rightarrow m(\widehat{AEB})=2\beta \Rightarrow |AB|=|AE|=|EC|$

$m(\widehat{EAD})=\alpha+\beta=60^\circ$ ve

$|AD|=|AB|=|AE| \Rightarrow \widehat{AED}$ eşkenar

$\Rightarrow |DE|=|AE|=|EC| \Rightarrow$

$m(\widehat{EDC})=m(\widehat{ECD})=\beta+x$

$m(\widehat{CED})=180^\circ-60^\circ-2\beta=2\cdot(60^\circ-\beta)=2\alpha$

$\Rightarrow \widehat{EDC}$'den $2\alpha+\beta+x+\beta+x=180^\circ \Rightarrow 2(\alpha+\beta)+2x=180^\circ$

$\Rightarrow 2x=60^\circ \Rightarrow x=30^\circ$

$\Rightarrow$ (a)

14.

Her $1\leq k\leq 1000$ tam sayısı için k'dan başladığında Ali k'nın katları olan kutulara birer top koyuyor $\Rightarrow$ Her $1\leq n\leq 1000$ için n. kutuda n'nin pozitif bölen sayısı kadar top bulunacak. 3 top olması için p asal olmak üzere $n=p^2$ şeklinde olmalı.

$n=2^2, 3^2, 5^2, 7^2, 11^2, 13^2, 17^2, 19^2, 23^2, 29^2, 31^2$

olabilir $\Rightarrow$ (a)

15.

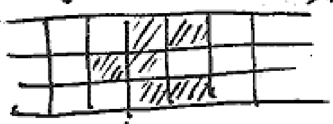
$$x^2-2x+1+y^2-1+\frac{1}{4y^2}=0 \Rightarrow$$

$$(x-1)^2+\left(y-\frac{1}{2y}\right)^2=0 \Rightarrow x=1 \,;\, y=\frac{1}{2y} \Rightarrow y^2=\frac{1}{2}$$

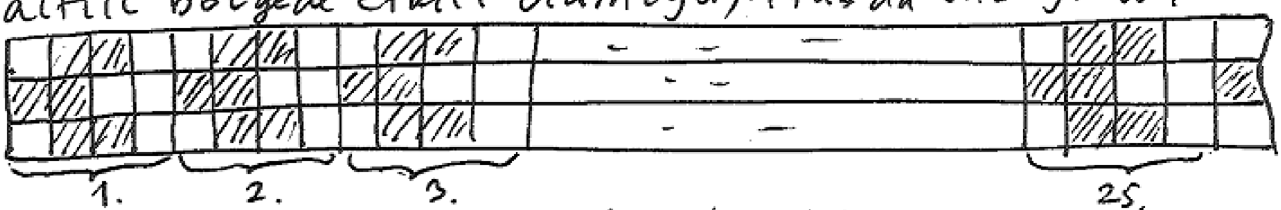
$$\Rightarrow x+4y^2=1+2=3 \Rightarrow (c)$$

16.

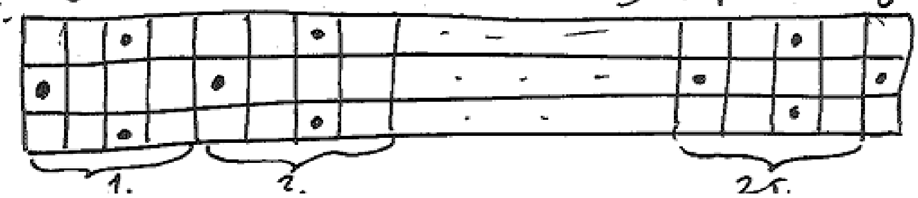
Bir tasın bulunduğu kareyle bunun komsularına "mayınlı bölge" diyelim. Sekildeki taralı bölgenin mayınlı olması için en az 3 tas gerekiyor. Bu bölgeye altılı bölge diyelim. 3x101 boyutlu



tahtanın asağıdaki taralı alanının mayınlı olması için en az 25·3+1 tas gerekiyor, çünkü her altılı bölge için 3 tas gerekiyor ve bir tas 2 altılı bölgede etkili olamıyor, 1 tas da en sağdaki



sütun için. Asağıdaki örnek 76 tasın yeterli olduğunu göstermektedir.

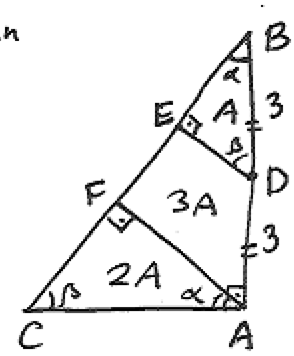


$\Rightarrow$ (a)

17.

AF ⊥ BC çizelim. Alan$(D\widehat{B}E)$ = A olsun
⇒ Alan(ADEF) = 3A.
Alan(ADEC) = 5A ⇒ Alan$(A\widehat{F}C)$ = 2A
$\overset{\triangle}{AFC} \sim \overset{\triangle}{BED} \Rightarrow$
$\frac{|AC|^2}{|BD|^2} = \frac{2A}{A} = 2 \Rightarrow \frac{|AC|}{3} = \sqrt{2}$
$\Rightarrow |AC| = 3\sqrt{2}$

⇒ (b)



18.

$36! = 2^{34} \cdot 3^{17} \cdot 5^{8} \cdot 7^{5} \cdot \underbrace{11^{3} \cdots 31}$
$34! = 2^{32} \cdot 3^{15} \cdot 5^{7} \cdot 7^{4} \cdot \underbrace{11^{3} \cdots 31}$ aynı

$\frac{\overset{7}{\cancel{35}} \cdot \overset{9}{\cancel{18}} \cdot \overset{3}{\cancel{9}} \cdot \overset{3}{\cancel{6}}}{\underset{11}{\cancel{33}} \cdot 16 \cdot \underset{2}{\cancel{8}} \cdot \cancel{5}} = \frac{567}{352}$

⇒ (d)

19.

$$\begin{cases} 2f(x) + 3f\left(\frac{2010}{x}\right) = 5x & \times(-2) \\ 2f\left(\frac{2010}{x}\right) + 3f(x) = 5 \cdot \frac{2010}{x} & \times 3 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{array}{rl} & -4f(x) - 6f\left(\frac{2010}{x}\right) = -10x \\ + & 6f\left(\frac{2010}{x}\right) + 9f(x) = \frac{30150}{x} \\ \hline & 5f(x) = \frac{30150}{x} - 10x \Rightarrow f(x) = \frac{6030}{x} - 2x \end{array}$$

$\Rightarrow f(6) = \frac{6030}{6} - 2 \cdot 6 = 1005 - 12 = 993$

⇒ (a)

20.

20 oy alarak Necati'yle esitlenir. Sonra geriye kalan $300-70-75-75=80$ oyun yarısından fazlasını (yani en az 41 oy) alırsa seçimi kazanır. Böylece arka arkaya $20+41=61$ oy alırsa kazanmayı garantiler.

$\Rightarrow$ (a)

21.

$|AD|=a$ olsun $\Rightarrow |DC|=2a,\ |AC|=3a \Rightarrow$

$|AH|=\dfrac{2\cdot 3a}{3}=2a \Rightarrow |DH|=a \Rightarrow |HC|=a$

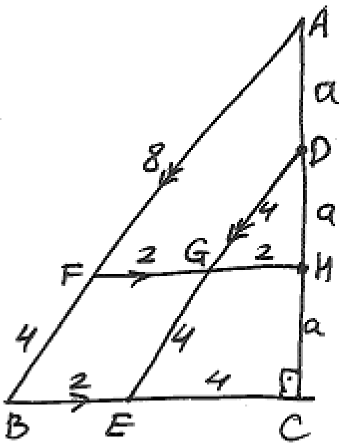
$\Rightarrow |GD|=4 \Rightarrow |AF|=8 \Rightarrow |AB|=12$

$|GH|=|FG|=2 \Rightarrow |EC|=4 \Rightarrow |BC|=6$

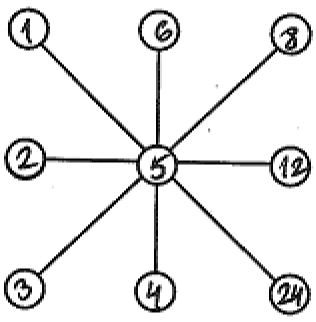
$\Rightarrow AC=\sqrt{12^2-6^2}=\sqrt{18\cdot 6}=6\sqrt{3}$

$\text{Alan}(A\hat{B}C)=\dfrac{6\cdot 6\sqrt{3}}{2}=18\sqrt{3}$

$\Rightarrow$ (d)



22.



$1+2+3+4+6+8+12+24+5=65$

a) 36 b) 52 c) 65 d) 72 e) 76

Çarpımlar n olsun. O halde ya n'nin pozitif tam bölenlerinin sayısı 9 olacak (bunlardan en küçükleri $2^2\cdot 3^2=36$ ve $2^2\cdot 3\cdot 5=30$), yada 8 olacak (bu da en az $2^3\cdot 3=24$ olur) ve merkez n'nin böleni olmayan bir sayı yazacağız. Denediğimizde toplamın en az olması için $n=24$ alınması ve merkeze 5 yazılmasının gerektiğini görüyoruz.

$\Rightarrow$ (c)

23.

$$A=\sqrt{0,\underbrace{44\ldots4}_{100}}=\sqrt{\frac{4\cdot\frac{10^{100}-1}{9}}{10^{100}}}=\frac{2}{3}\cdot\sqrt{\frac{10^{100}-1}{10^{100}}}<\frac{2}{3}$$

Öte yandan Bernoulli esitsizliginden

$$A=\frac{2}{3}\cdot\sqrt{1-\frac{1}{10^{100}}}>\frac{2}{3}\cdot\left(1-\frac{1}{2\cdot 10^{100}}\right)=\frac{2}{3}-\frac{1}{3\cdot 10^{100}}$$

$\frac{1}{3\cdot 10^{100}}<\frac{1}{10^{100}}$ olduğundan A'nın virgülden sonraki 100. rakamı $\frac{2}{3}$'ünküyle aynıdır.

$\frac{2}{3}=0,66\ldots$

$\Rightarrow$ (e)

24.

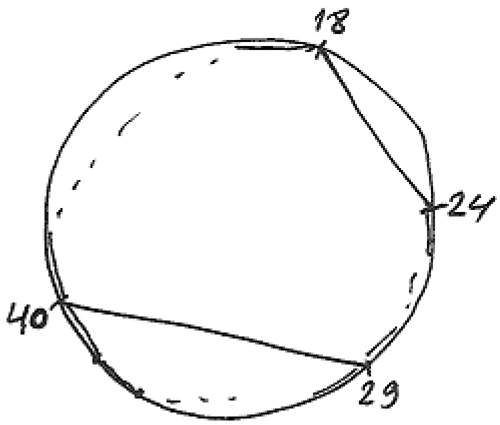
50-gen bir 7-gene, bir 12-gene, bir de 35-gene bölünüyor. Bunların köşegen sayılarının toplamı

$\frac{7\cdot 4}{2}+\frac{12\cdot 9}{2}+\frac{35\cdot 32}{2}=$

$=14+54+560=628$

olacak

$\Rightarrow$ (a)



25.

$|NH|=a$ olsun. $|BH|=|HC| \Rightarrow |BF|=2a$

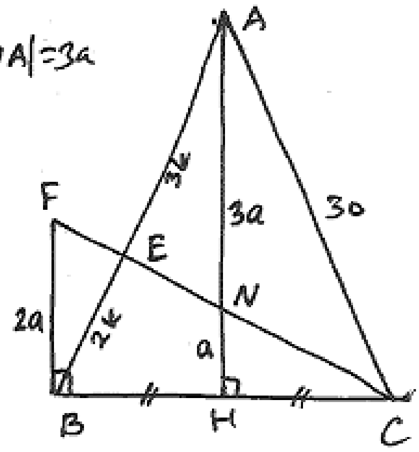
$Alan(A\hat{B}C)=2\cdot Alan(F\hat{B}C) \Rightarrow |AH|=4a \Rightarrow |NA|=3a$

$B\hat{F}E \sim A\hat{N}E \Rightarrow \frac{|AE|}{|EB|}=\frac{3a}{2a}=\frac{3}{2}$

$|AE|=3k$, $|EB|=2k \Rightarrow 5k=30$

$\Rightarrow k=6 \Rightarrow |AE|=3k=18$

$\Rightarrow$ (d)



26.

$5\cdot 5\cdot 5=125$ sayı bulunur. Her rakam her basamakta aynı kez kullanıldığından toplam;

$\frac{125}{5}\cdot(1+2+3+4+5)\cdot(1+10+100)=25\cdot 15\cdot 111$ olacak.

mod 11'de $25\cdot 15\cdot 111\equiv 3\cdot 4\cdot 1\equiv 12\equiv 1 \pmod{11}$

$\Rightarrow$ (b)

27.

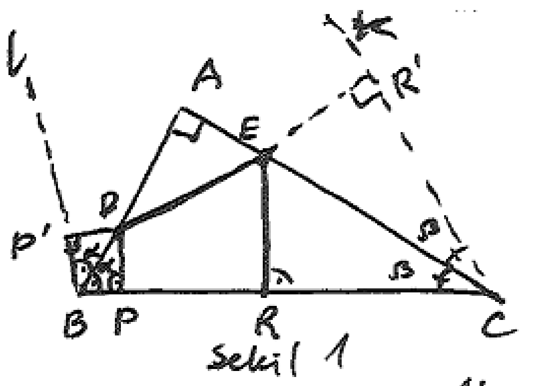
Sayılar $a_1, a_2, \ldots, a_7$ olsun. Genelliği bozmadan $\frac{a_2+a_3+\ldots+a_7}{6}+a_1=22$ olduğunu varsayabiliriz.
$T=a_1+a_2+\ldots+a_7$ alırsak $\frac{T-a_1}{6}+a_1=20 \Rightarrow T+5a_1=20\cdot 6$
Benzer şekilde $T+5a_2=22\cdot 6, \ldots, T+5a_7=45\cdot 6$ olduğunu varsayabiliriz. Bu durumda en küçük sayı a_1, en büyük sayı a_7'dir $\Rightarrow$
$5a_7-5a_1=45\cdot 6-20\cdot 6=25\cdot 6 \Rightarrow a_7-a_1=5\cdot 6=30$
$\Rightarrow$ (b)

28.

$365-340=25$ kapalı gün olacak. Remzi 77 gün tatil yaparsa $n=1,2,\ldots,25$ için $(3n)$. günler kapalı olursa art arda 3 güneşli gün yakalayamaz. 78 günün yeterli olacağını gösterelim.
İlk kapalı günden önceki güneşli gün sayısı a_1, 1. ile 2. arasındaki $a_2, \ldots$, 24. ile 25. arasındaki a_{25} ve 25.'den sonraki a_{26} olsun.
$a_1+a_2+\ldots+a_{26}=78-25=53>26\cdot 2$ olduğundan $a_k \geq 3$ olacak şekilde bir $k\in\{1,2,\ldots,26\}$ bulunur dolayısıyla Remzi 3 ardışık güneşli gün yakalamış olacak.
$\Rightarrow$ (b)

29.

P'nin AB'ye göre simetriği P',
R'nin AC'ye göre simetriği de R' olsun.
$\Rightarrow |PD|+|DE|+|ER| = |P'D|+|DE|+|ER'| \Rightarrow$
P', D, E, R' doğrusal ($2\alpha+2\beta=180^\circ \Rightarrow l \parallel k$)
$\Rightarrow$ Şekil 2'deki KN'i bulmamız gerekiyor. $|AB|=m$, $|AC|=n$
$\Rightarrow |BC| = \sqrt{m^2+n^2} \Rightarrow$

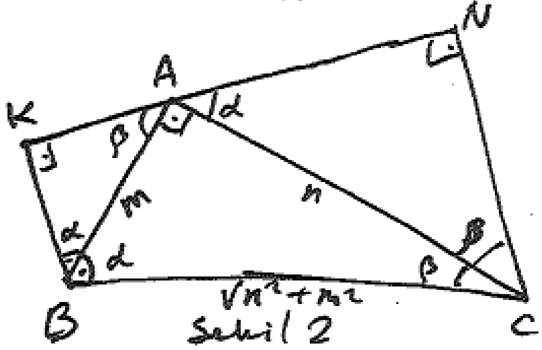


$$|KA| = m\sin\alpha = \frac{m\cdot n}{\sqrt{m^2+n^2}}$$

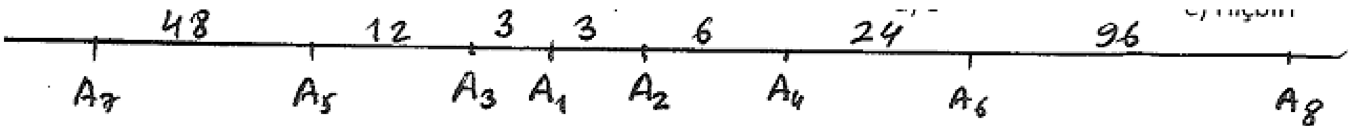
$$|AN| = n\cos\alpha = \frac{n\cdot m}{\sqrt{m^2+n^2}}$$

$$\Rightarrow |KN| = \frac{2mn}{\sqrt{m^2+n^2}}$$

$\Rightarrow$ (c)



30.



$d(A_1,A_2)=d(A_1,A_3)=3 \Rightarrow d(A_2,A_4)=d(A_2,A_3)=6$; $d(A_3,A_5)=d(A_3,A_4)=12$
$\Rightarrow d(A_4,A_6)=d(A_4,A_5)=24=3\cdot 2^3$; $d(A_5,A_7)=d(A_5,A_6)=3\cdot 2^4$,
$d(A_6,A_8)=d(A_6,A_7)=3\cdot 2^5, \ldots \Rightarrow$

$d(A_1,A_{1000}) = d(A_1,A_2)+d(A_2,A_4)+d(A_4,A_6)+\ldots+d(A_{998},A_{1000}) =$
$= 3+6+(3\cdot 2^3+3\cdot 2^5)+(3\cdot 2^7+3\cdot 2^9)+\ldots+(3\cdot 2^{498}+3\cdot 2^{501}) =$
$= 9 + 3\cdot 2^3\cdot 5 + 3\cdot 2^7\cdot 5 + \ldots + 3\cdot 2^{498}\cdot 5 \equiv 9 \pmod{10}$

$\Rightarrow$ (a)

31.

$f_1(x)=x$; $f_2(x)=\frac{1}{1-x}$; $f_3(x)=\frac{1}{1-\frac{1}{1-x}}=\frac{1-x}{1-x-1}=\frac{x-1}{x}$

$f_4(x)=\frac{1}{1-\frac{x-1}{x}}=\frac{x}{x-x+1}=x \Rightarrow f_{3k+1}(x)=x \Rightarrow$

$f_{3k}(x)=f_3(x) \Rightarrow f_{2019}(2019)=f_3(2019)=\frac{2019-1}{2019}=\frac{2018}{2019}$

$\Rightarrow$ (d)

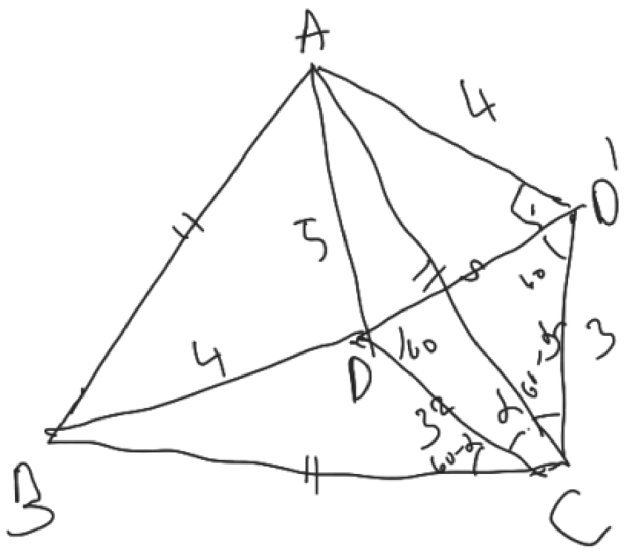
32.

x kez 1'e, y kez 3'e, z kez 7'ye ve u kez 12'ye isabet etmiş olsun $\Rightarrow x+y+z+u=3$, $x\geq 0$, $y\geq 0$, $z\geq 0$, $u\geq 0$. Bu denklemin $\binom{4+3-1}{3}=\binom{6}{3}=20$ çözümü var, yalnız 9 sayısı $9=3+3+3=7+1+1$ gibi 2 değişik şekilde gösterilebildiği için toplam $20-1=19$ değer alabilir.

$\Rightarrow$ (C)

BERFİN DENEME ÇÖZÜMLERİ

1.



$\overset{\triangle}{BDC}$ üçgeni [BC] ile [AC] çakışacak şekilde dışarı tarafa yapıştırılırsa $DD'C$ eşkenar üçgen $DD'A$ ise dik üçgen gelir.

$m(CD'A) = m(BDC) = 150^\circ$

$\Rightarrow$ (d)

2.

A sayısı 2 ya da 3 basamaklı olabilir.

2 basamaklı ab şeklinde ise $ab + a + b = 11a + 2b = 106$

$\Rightarrow$ $a=8$ $b=9$ olabilir $\Rightarrow$ $89 \equiv 4 \pmod 5$

3 basamaklı abc şeklinde olamayacağı

$abc + a + b + c = 101a + 11b + 2c \neq 106$ 'dan görülür.

$\Rightarrow$ (e)

3.

$5^a = x$ ve $2^a = y$ alındığında $5^{2a} - 10^a - 2^{2a+1} = x^2 - xy - 2y^2 = 0$

$\Rightarrow (x-2y)\cdot(x+y) = 0 \Rightarrow x = 2y$ veya $x = -y$ bulunur.

$x = -y$ olamayacağından $x = 2y$ olur. $5^a = 2 \cdot 2^a$

$\Rightarrow \left(\frac{5}{2}\right)^a = 2 \Rightarrow 2^{\frac{1}{a}} = \frac{5}{2} \Rightarrow 8^{\frac{1}{a}} = \left(\frac{5}{2}\right)^3 = \frac{125}{8}$

$\Rightarrow 2^{\frac{1}{a}} + 8^{\frac{1}{a}} = \underset{(4)}{\frac{5}{2}} + \frac{125}{8} = \frac{145}{8} \Rightarrow$ (e)

4.

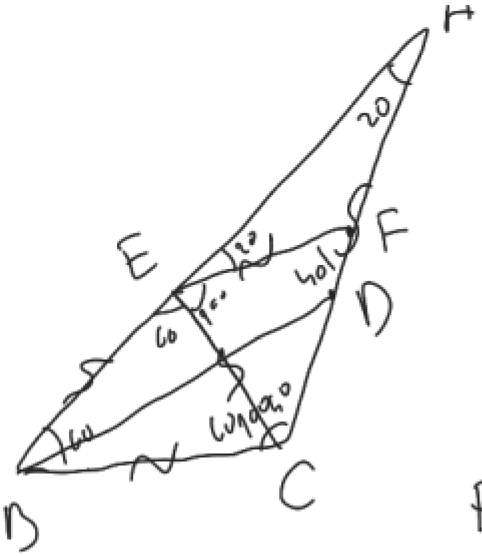
Mavi sayısı $= m$, Yeşil sayısı $= y$ ve Beyaz sayısı $= b$

olsun $b + y = 18$, $m + b = 22$ ve, $m + y = 24$

eşitlikleri taraf tarafa toplandığında $2m + 2y + 2b = 64$

$\Rightarrow m + y + b = 32 \Rightarrow m = 32 - 18 = 14 \Rightarrow$ (c)

5.



[AB] üzerinde $\widehat{EBC}$ eşkenar olacak şekilde bir E noktası alınır. |EC|=|EF| olacak şekilde [AD] üzerinde bir F noktası alındığından |EF|=|AF| olduğundan F noktası D'ile çakışmalıdır.

$$\Rightarrow m(\widehat{EBD}) = 10^\circ \Rightarrow m(\widehat{BDC}) = 30^\circ \Rightarrow (b)$$

6.

$$9A+8 = 2^3 \cdot 2^{152} \cdot 5^{152} \Rightarrow 9A+8 = 8 \cdot 10^{152}$$

$$\Rightarrow 9A = 8 \cdot 10^{152} - 8 \Rightarrow A = \frac{8(10^{152}-1)}{9}$$

$$\Rightarrow A = 8 \cdot \frac{99\ldots 9}{9} = \underbrace{88\ldots 8}_{152 \text{ tane}}$$

$$\underbrace{88\ldots 8}_{152} \equiv 152 \cdot 8 \equiv (-1)\cdot(-1) \equiv 1 \pmod 9$$

$$\Rightarrow (b)$$

7.

$$\sqrt{x} = a \Rightarrow x = a^2 \Rightarrow 3x\sqrt{x} = 13x - 16 \Rightarrow$$

$$3a^2 \cdot a = 13a^2 - 16 \Rightarrow 3a^3 = 13a^2 - 13 - 3 \Rightarrow$$

$$3a^3 + 3 = 13a^2 - 13 \Rightarrow 3(a^3+1) = 13(a^2-1)$$

$$\Rightarrow 3(a+1)(a^2-a+1) = 13(a-1)(a+1) \quad , \; a = \sqrt{x} \neq -1$$

$$3(a^2-a+1) = 13(a-1) \Rightarrow 3a^2 - 3a + 3 = 13a - 13$$

$$\Rightarrow 3a^2 - 16a + 16 = (3a-4)(a-4) = 0 \Rightarrow a_1 = \frac{4}{3} \text{ veya } a_2 = 4$$

$$a_1 = \frac{4}{3} \Rightarrow \sqrt{x} = \frac{4}{3} \;, x = \frac{16}{9} \Rightarrow 3 \cdot \frac{16}{9} - \frac{4}{3} = \frac{12}{3} = 4$$

$$a_2 = 4 \Rightarrow \sqrt{x} = 4 \;, x = 16 \Rightarrow 3 \cdot 16 - 4 = 44 \Rightarrow 4 + 44 = 48$$

$$\Rightarrow (e)$$

8.

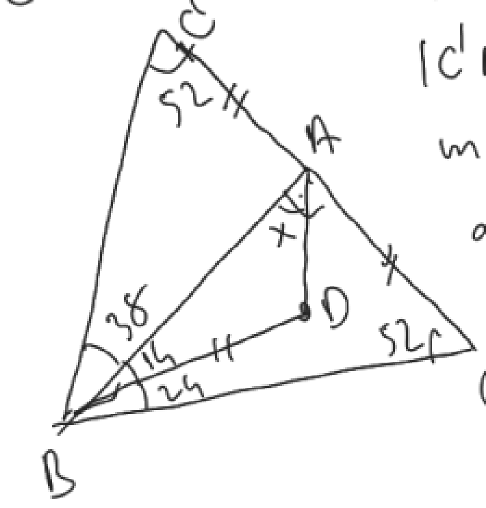
Önce sessiz harfleri sıralayalım. Sonra aralara seslileri sıralayacağız. 5 boşluktan D'nin hemen sonrası yasaklanır.

⌴D~~⌴~~N⌴R⌴L⌴ Kalan 4 boşluğa 3 sesli sıralanır.

$$4! \cdot \binom{4}{3} \cdot 3! = 24 \cdot 24 = 576 \Rightarrow (e)$$

9.

C noktasının AB'ye göre simetriği alındığında



$|C'A| = |AC| = |BD|$ bulunur.

$m(\widehat{DBA}) = m(\widehat{BC'A})$ ve $|C'A| = |BD|$ olduğundan $AC'BD$ ikizkenar yamuktur.

C $AD \parallel BC' \Rightarrow m(\widehat{BAD}) = m(\widehat{C'BA}) = 38^\circ$

$\Rightarrow$ (c)

10.

$100+101+102+103+ \ldots +999 \equiv 15+16+0+1+2\ldots+0+\ldots \quad 13$

$\Rightarrow 900-3 = 897$

$$\begin{array}{r|l} 897 & 17 \\ \cline{2-2} -85 & 52 \\ \hline 47 & \\ -34 & \\ \hline 13 & \end{array}$$

$53(1+2+\ldots 16+0) - 14$

$= 53 \cdot \frac{16 \cdot 17}{2} - 14$

$= 53 \cdot 8 \cdot 17 - 14 \equiv -14 \equiv 39 \pmod{53}$

$\Rightarrow$ (e)

11.

Bütün ifadelerin paydaları $(x-y)(y-z)(x-z)$ olacak şekilde düzenlenir.

$$\frac{x^2+y^2+z^2-xy-yz-xz}{(x-y)(y-z)(x-z)}=13$$ olur. Sorulan ifade

ile $$\frac{(y-z)^2+(x-z)^2+(x-y)^2}{(x-y)(y-z)(x-z)}=\frac{2(x^2+y^2+z^2-xy-yz-xz)}{(x-y)(y-z)(x-z)}=26$$

$\Rightarrow$ (e)

12.

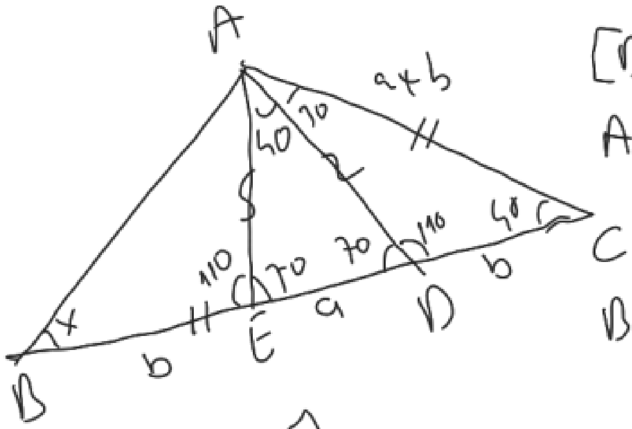
Dağılım direkt olarak yapıldığında aynı anda 1 veya 2 kabın taşma durumları olabilir. O halde tüm durumlardan taşmalar çıkarılmalıdır.

$$\binom{12+6-1}{6-1}-\underbrace{\binom{6}{1}\cdot\binom{7+6-1}{6-1}}_{\text{1 kabın taşması}}+\underbrace{\binom{6}{2}\cdot\binom{2+6-1}{6-1}}_{\text{2 kere sayılan 2 kabın taşmaları}}$$

$$\binom{17}{5}-6\cdot\binom{12}{5}+15\cdot\binom{7}{5}$$

$$6188-6\cdot 792+15\cdot 21=1751 \Rightarrow (d)$$

13.



[BD] üzerinde bir E noktası A ile birleştirilirse öyle ki $|AE| = |AD|$ olsun. Bu durumda $|AC| = |EC|$ dır.

$\overset{\triangle}{DCA} \cong \overset{\triangle}{EBA}$ bulunur. $m(ABD) = 40°$'dir. $\Rightarrow$ (b)

14.

11'e bölünme kuralı gereği birler basamağından itibaren + ve − konulduğunda 11−99 arası tüm iki basamaklı tek sayıların birler basamağına + onlar basamağına − gelecektir.

$$A \equiv 9(1+3+5+7+9) - 5(1+2+3+4+\dots+9) + 9 - 7 + 5 - 3 + 1 \pmod{11}$$

$$\equiv 9 \cdot 25 - 5 \cdot 45 + 5 \pmod{11}$$

$$\equiv (-2)\cdot(3) - \cancel{5} \cdot 1 \cancel{+5} \equiv -6 \equiv 5 \pmod{11}$$

$\Rightarrow$ (d)

15.

$$\frac{x^2+2x-3}{x+5}=8 \Rightarrow x^2+2x-3=8x+40 \Rightarrow x^2-6x-43=0$$

$$(x-3)^2-52=0 \quad x_1=3-2\sqrt{13} \vee x_2=3+2\sqrt{13}$$

$$\frac{y^2-4}{y+4}=8 \Rightarrow y^2-4=8y+32 \Rightarrow y^2-8y-36=0$$

$$(y-4)^2-52 \Rightarrow y_1=4-2\sqrt{13} \vee y_2=4+2\sqrt{13}$$

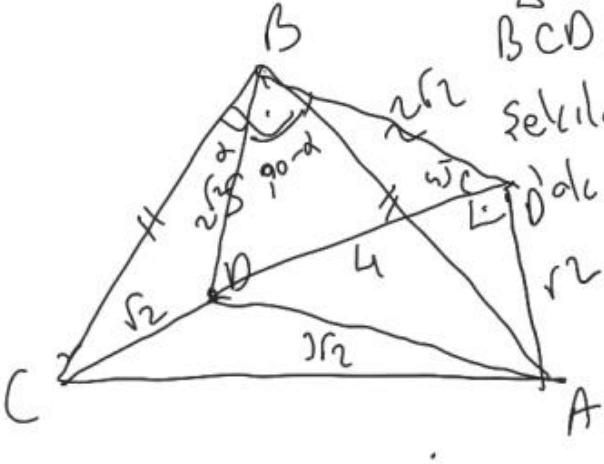
$$x\cdot y<0 \Rightarrow x_1+y_2=x_2+y_1=7 \Rightarrow (b)$$

16.

a_n: Yan yana n kutunun en az 1 komşusu aynı renk olmak üzere sarı, kırmızı veya maviye boyamalarının kaçında en baştaki kutunun sarı olduğunun sayısı olsun. Durumlar simetrik olduğundan en sonunda 3 renk olduğundan bulduğumuz sonucu 3 ile çarpacağız. Başlangıç koşulları dorde $a_1=0$, $a_2=1$ (SS), $a_3=1$ (SSS) $a_4=3$ (SSSS, SSKK, SSMM) bulunur. İndirgeme bağıntısı ise şu şekilde oluşturulabilir. 1. kutu sarı olduğundan 2. kutu sarı olacaktır. 3. kutu sarı olursa a_{n-1}, sarı olmazsa diğer iki renkten biriyle başlayan yeni bir boyama gibi düşünülürse $2\cdot a_{n-2}$ olur. Bu durumda $a_n=a_{n-1}+2a_{n-2}$ bulunur.

$$a_{12}=683 \Rightarrow 3\cdot 683=2049 \Rightarrow (a)$$

17.



$\overset{\triangle}{BCD}$ üçgenini [BA] ile [BC] çakışacak şekilde dış tarafa yapıştırarak döndürürsek BDD' ikizkenar dik üçgen dir. $DD'A$ ise pisagor bağıntısını sağlayan dik üçgen dir.

$m(BD'A) = m(BDC) = 135°$

$\Rightarrow$ (c)

18.

A = ab iki basamaklı sayısı olsun. $t(A) = a+b$ 4

$ç(A) = a \cdot b \Rightarrow 10a+b+a+b+a \cdot b = 86 \Rightarrow 11a+2b+a \cdot b = 86$

$\Rightarrow a = \dfrac{-2b+86}{b+11} = -2 + \dfrac{108}{b+11} \Rightarrow b=1, a=7$ 71

$\Rightarrow b=7, a=4$ 47

$\Rightarrow$ 2 tane $\Rightarrow$ (c)

19.

$x \cdot yz = 2 \Rightarrow z = \frac{2}{xy}$ dır. $x + \frac{1}{z} = 5 \Rightarrow x + \frac{1}{\frac{2}{xy}} = 5$

$\Rightarrow x + \frac{xy}{2} = 5 \Rightarrow 2x + xy = 10 \Rightarrow xy = 10 - 2x$ (1)

$y + \frac{1}{x} = 12 \Rightarrow xy + 1 = 12x \Rightarrow xy = 12x - 1$ (2)

(1) ve (2) eşitliğinden $10 - 2x = 12x - 1 \Rightarrow 14x = 11 \Rightarrow x = \frac{11}{14}$

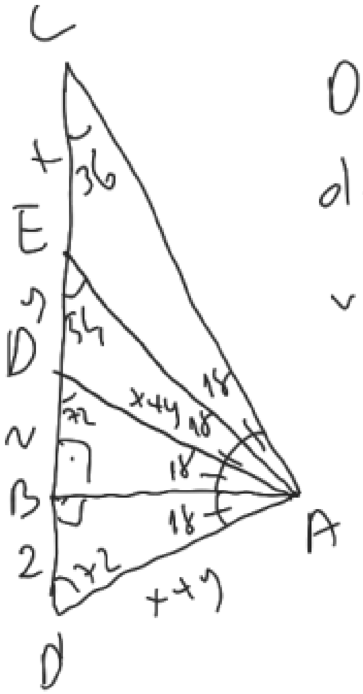
$\Rightarrow y = \frac{118}{11} \Rightarrow z = \frac{14}{59}$ bulunur.

$z + \frac{1}{y} = \frac{14}{59} + \frac{1}{\frac{118}{11}} = \frac{14}{\underset{(2)}{59}} + \frac{11}{118} = \frac{39}{118} \Rightarrow$ (e)

20.

Güvercin yuvası ilkesini kullanabiliriz. 12 ayın herbirinde 3 kişi ve herhangi birinde 4 kişi doğması durumunda aynı ayda doğmuş en az 4 kişi bulmak garantilenecektir. $3 \cdot 12 + 1 = 37 \Rightarrow$ (d)

21.



O noktasının AB'ye göre simetriği D' olsun. Bu durumda $|CD| = |DA| = |AD'|$ ve $|D'A| = |ED'|$ olur.

$x+y = y+4 \Rightarrow x = 4 \Rightarrow$ (a)

22.

$\boxed{5}\ \underbrace{\_\ \_\ \_\ \_\ \_\ \_}$ Birler basamağına 0 ya da 5 geleceğinden 5 e bölünmesi kesindir. 15 e bölünmesi için 3'e de bölünmesi gerekir. Bu durumda sayımızdaki 5 sayısı 3 ya da 6 tane olmalıdır. Kalan 6 basamak için 2 tane 5 ve 4 tane 0'ın sıralanma sayısı $\frac{6!}{2! \cdot 4!}$ ile 5 tane 5 ve 1 tane 0'ın sıralanma sayısı $\frac{6!}{1!\,5!}$ dir. $15 + 6 = 21 \Rightarrow$ (e)

23.

$2^x - 4 = a$ ve $4^x - 2 = b$ olsun. Bu durumda verilen denklem $a^3 + b^3 = (a+b)^3$ olur.

$a^3 + b^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \Rightarrow 3a^2b + 3ab^2 = 0$

$\Rightarrow 3ab(a+b) = 0 \Rightarrow a = 0 \vee b = 0 \vee a = -b$

$2^x - 4 = 0 \Rightarrow x = 2$, $4^x - 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$, $2^x - 4 = -4^x + 2$

$\Rightarrow 4^x + 2^x - 6 = (2^x + 3)\cdot(2^x - 2) = 0 \Rightarrow x = 1$

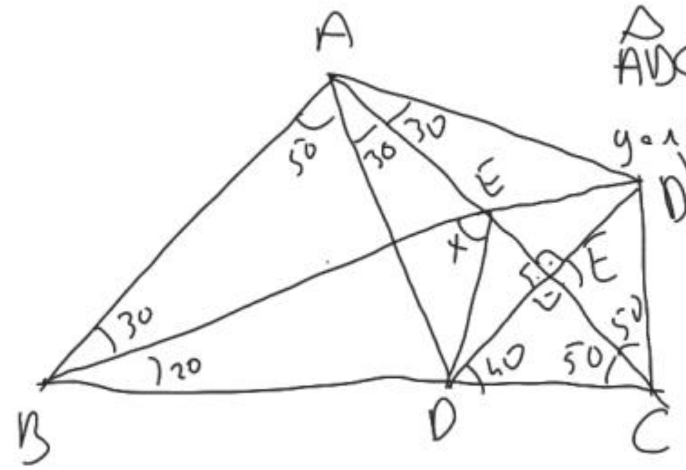
$\Rightarrow 2 + \frac{1}{2} + 1 = \frac{7}{2} \Rightarrow$ (b)

24.

7 tane A ve 5 tane B, B'ler yan yana gelmeyecek şekilde sıralandığında ve soldan sağa 1'den 12'ye kadar sayılar bu 12 harfin üzerine yazıldığında B'lerin üzerine gelen sayılar ardışık olmayacaktır.

_A_A_A_A_A_A_A_ A'ların arasındaki 8 boşluktan 5 tanesi B'ler için seçilir. $\binom{8}{5} \Rightarrow$ (b)

25.



$\overset{\triangle}{ADC}$ üçgeni AC'ye göre yansıtılır. ADD' eşkenar üçgen olduğundan $|BD| = |AD| = |DD'|$ dır. $m(BDD') = 140°$ olduğundan B, E ve D' doğrusal dır. $m(DD'B) = 20°$ ve $|DE| = |ED'|$ olduğundan $m(B\hat{E}D) = 40°$ $\Rightarrow$ (d)

26.

$n^5 - 5n^3 + 4n = n(n^4 - 5n^2 + 4) = n(n^2-4)(n^2-1)$

$= n(n-2)(n+2)(n-1).(n+1)$ şeklinde çarpanlarına ayrılabilir. Düzenlendiğinde $(n-2)(n-1).n(n+1)(n+2)$ şeklinde ardışık 5 sayının çarpımı olduğu görülür. Ardışık 5 sayının çarpımı $5! = 120$'ye bölünebilir. 120'nin katı olan bir sayı ise 6, 8, 10, 60, 120 ile daima tam bölünür.

$\Rightarrow$ (b)

27.

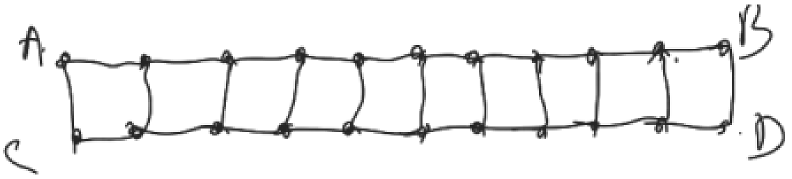
Art. ort $\geq$ Geo. ort

$$\frac{a+a+2b^2+2b^2+3c^3+3c^3}{6} \geq \sqrt[6]{a\cdot a\cdot 2b^2\cdot 2b^2\cdot 3c^3\cdot 3c^3}$$

$$\frac{2a+4b^2+6c^3}{6} \geq \sqrt[6]{36a^2b^4\cdot c^6} = \sqrt[6]{36\cdot 36^2} = \sqrt[6]{6^6} = 6$$

$$2a+4b^2+6c^3 \geq 36 \Rightarrow (c)$$

28.

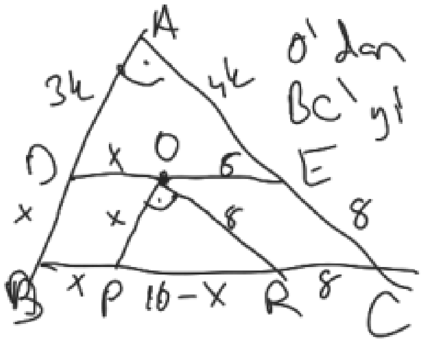


Paralelkenarın [AB] üzerindeki kenarının uzunluğu kaç birim ise [CD] üzerindeki kenarının uzunluğu da aynı olmalıdır. Bu uzunluklar üzerinden seçimler yapacak olursak [AB]'de 1 birim uzunluğunda 10 seçenek, 2 birim uzunluğunda 9, 3 birim 8 ... şeklindedir.

$$10\cdot 10 + 9\cdot 9 + 8\cdot 8 + \dots 1\cdot 1 = 1^2+2^2+\dots 10^2 = \frac{10\cdot 11\cdot 21}{6} = 385$$

$$\Rightarrow (a)$$

29.



O'dan AB ve AC ye paralel doğrular ... BC'yi kesme noktaları P ve R olsun. Bu durum PO ⊥ RO olduğu gibi BPOD ve RCEO eşkenar dörtgendir. POR'de pisagor uygulanırsa $|PO| = 6$, $|PR| = 10$ bulunur. $\overset{\triangle}{OPR} \sim \overset{\triangle}{ABC}$'den $|AC| = \frac{96}{5}$ ve $|AB| = \frac{72}{5}$ $\Rightarrow A(\overset{\triangle}{ABC}) = \frac{3456}{25} = \frac{m}{n}$

$\Rightarrow m+n = 3481 \Rightarrow$ (d)

30) 3600' ün tüm pozitif tam bölenlerinin çarpımı kaçtır?

30.

3600'ün pozitif bölen sayısı $2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \Rightarrow 5 \cdot 3 \cdot 3 = 45$ bulunur. Pozitif bölenleri liste halinde yazıp çarpalım

$$\left.\begin{array}{l} 1 \cdot 3600 = 3600 \\ 2 \cdot 1800 = 3600 \\ 3 \\ 4 \quad \vdots \\ \vdots \\ \times\ 3600 \cdot 1 = 3600 \end{array}\right\} 45 \text{ tane}$$

$$x \cdot x = 3600^{45} \Rightarrow x^2 = 3600^{45} \Rightarrow x = 60^{45}$$

$\Rightarrow$ (a)

31.

Verilen fonksiyonel eşitlik düzenlenecek olursa

$n\left(f(n+1)-f(n)\right) = 2f(n) \Rightarrow n\cdot f(n+1) - nf(n) = 2f(n)$

$\Rightarrow n\cdot f(n+1) = n\cdot f(n) + 2f(n) \Rightarrow n\cdot f(n+1) = (n+2)f(n)$

$\Rightarrow \dfrac{f(n+1)}{f(n)} = \dfrac{n+2}{n}$ elde edilir. Eşitlikte $n=1$'den $n=2020$'ye kadar değerler yazılıp taraf tarafa çarpılır.

$\dfrac{\cancel{f(2)}}{f(1)} \cdot \dfrac{\cancel{f(3)}}{\cancel{f(2)}} \cdots \dfrac{f(2021)}{\cancel{f(2020)}} = \dfrac{\cancel{3}}{1} \cdot \dfrac{\cancel{4}}{2} \cdot \dfrac{5}{\cancel{3}} \cdot \dfrac{6}{\cancel{4}} \cdots \dfrac{2022}{\cancel{2020}} \Rightarrow \dfrac{f(2021)}{f(1)} = \dfrac{2021\cdot 2022}{2} \Rightarrow f(2021) = 6063$

$\Rightarrow (d)$

32) 10 basamaklı bir merdiveni her adımında 1 veya 3 basamak çıkan birisi bu süreçte sadece bir kere 2 basamak geri hamle yaparak kaç farklı şekilde çıkabilir?

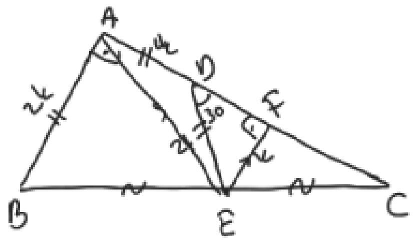
32.

a_n: n basamaklı bir merdivenin her adımında 1 veya 3 basamak çıkılarak kaç farklı şekilde çıkılabileceğinin sayısı olsun. Başlangıç koşulları olarak $a_1=1$ (1), $a_2=1$ (11), $a_3=2$ (111, 3), $a_4=3$ (1111, 13, 31) şeklindedir. İndirgeme bağıntısı ilk adımında 1 basamak çıkar ise a_{n-1}, 3 basamak çıkar ise a_{n-3} olacağından $a_n = a_{n-1} + a_{n-3}$ olarak bulunur. $r<n$ olmak üzere r. basamakta 2 basamak geri hamle yapacağını düşünecek olursak bu basamağa kadar a_r, sonrasında n. basamağa kadar a_{n-r+2} şekilde çıkacağından istenen sonuca $n=10$ için $\sum_{r=2}^{9} a_r \cdot a_{12-r}$ ile ulaşılabilir.

$$\sum_{r=2}^{9} a_r \cdot a_{12-r} = a_2 \cdot a_{10} + a_3 \cdot a_9 + \dots + a_9 \cdot a_3 = 318 \Rightarrow (c)$$

ONUR DENEME ÇÖZÜMLERİ

1.



E'den AC'ye indirilen dikmenin ayağı F olsun. DEF üçgeni 30-60-90 üçgeni olacağından $|FE| = \frac{|DE|}{2} = \frac{|AB|}{2} \Rightarrow |BE| = |EC|$ dır.

A ile E birleştirilecek olursa DAE ve ECA ikizkenar üçgenler geleceğinden $m(D\hat{A}E) = m(D\hat{C}E) = 15^\circ$ bulunur.

$\Rightarrow$ (a)

2.

Kutuları 1'den başlayarak numaralandırdığımızda yapılan işlemler sonucunda her kutuya pozitif bölen sayısı kadar sayı yazıldığı görülür. $120 = 2^3 \cdot 3^1 \cdot 5^1$'in pozitif bölen sayısı $(3+1)(1+1)(1+1) = 16$ dır. $\Rightarrow$ (a)

3.

$a+b=1$ ve $a \cdot b = -a+b$'dir. İkinci denklemde $b = 1-a$ yazılır ise $a\cdot(1-a) = -a+1-a \Rightarrow a - a^2 = -2a+1$

$\Rightarrow a^2 - 3a + 1 = 0 \Rightarrow \Delta = 5 \Rightarrow a_1 = \frac{3-\sqrt{5}}{2} \Rightarrow b_1 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$

$\Rightarrow a_1 \cdot b_1 = \frac{-8+4\sqrt{5}}{4}$ bulunur. $a_2 = \frac{3+\sqrt{5}}{2} \Rightarrow b_2 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$,

$\Rightarrow a_2 \cdot b_2 = \frac{-8-4\sqrt{5}}{4}$ bulunur. $a \cdot b$'nin alabileceği değerler

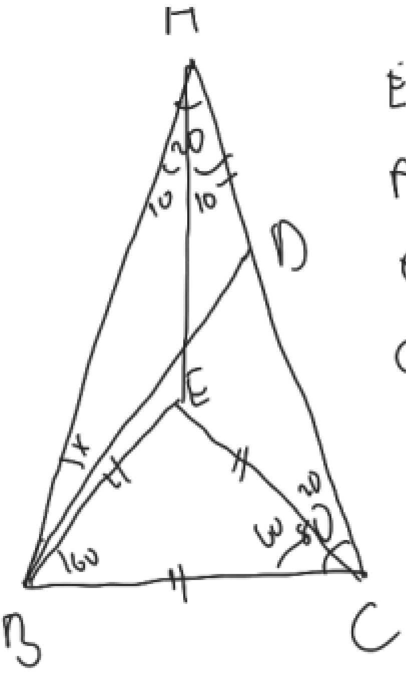
toplamı $\frac{-8+4\sqrt{5}}{4} + \frac{-8-4\sqrt{5}}{4} = \frac{-16}{4} = -4 \Rightarrow$ (a)

4.

Cevap anahtarını bütün sorular "a" olacak şekilde ayarlarsak 5 "a" 5 "b" yapan birisi her nasıl yapmış olursa olsun 5 doğrusu olacaktır. Aynı durum "b" için de durumunda buradan 2 tane gelir. 1 sorunun cevabı "a" diğerleri "b" ayarlarsa yine en az 4 doğrusu garanti olacaktır. Bunu 10 şekilde belirleyebiliriz. Bu durumda $2\cdot 10 + 2\cdot 1 = 22$ bulunur.

$\Rightarrow$ (e)

5.



EBC eşkenar üçgeni çizildiğinde AE doğrusu ABC üçgeni için simetri ekseni olacaktır. Bu durumda

$\widehat{CAE} \cong \widehat{ABD} \Rightarrow m(\widehat{CAE}) = m(\widehat{ABD}) = 10^\circ$

$\Rightarrow$ (e)

6.

$m \equiv 3 \pmod 9 \Rightarrow m+3 \equiv 6 \pmod 9$ Bu durumda

$m+3 = 6, 15, 24$ ve 33 olabilir. $\Rightarrow$ (c)

7.

$m = 10^{100} - 1 \Rightarrow m^4 = (10^{100}-1)^4 = 10^{400} - 4\cdot 10^{300} + 6\cdot 10^{200} - 4\cdot 10^{100} + 1$

öncelikli olarak toplamalar yapılırsa

$$1\underbrace{00\ldots0}_{199 \text{ tane } 0}6\underbrace{00\ldots0}_{199 \text{ tane } 0}1 - 4\underbrace{00\ldots0}_{199 \text{ tane } 0}4\underbrace{00\ldots0}_{100 \text{ tane } 0}$$

$$= \underbrace{99\ldots9}_{99 \text{ tane } 9}6\underbrace{0\ldots0}_{99 \text{ tane } 9}5\underbrace{99\ldots9}_{99 \text{ tane } 9}6\underbrace{00\ldots0}_{99 \text{ tane } 0}1$$

$99\cdot 9 + 6 + 5 + 99\cdot 9 + 6 + 1$

$99\cdot 18 + 18 = 100\cdot 18 = 1800 \Rightarrow$ (b)

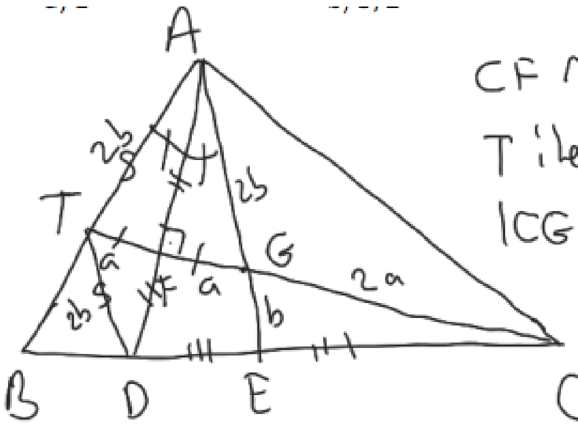
8.

Kümenin elemanlarından toplamları 13 olan ikilileri belirlediğimizde bu iki elemanın arasında kalan elemanların var ya da yok olma durumları sayısınca alt küme bulunabilir. 1-12 için 2^{10}, 2-11 için 2^8, 3-10 için 2^6 şeklinde 6-7 için 2^0 a kadar toplamlardır. $2^0 + 2^2 + 2^4 + \ldots + 2^{10}$

$= 1 + 4 + 4^2 + \ldots 4^5 = \frac{4^6-1}{4-1} = \frac{4096-1}{3} = \frac{4095}{3} = 1365$

$\Rightarrow$ (c)

9.



CF ∩ AB = {T} olsun. ATG ikizkenar üçgen
T ile D birleştirildiğinde |AT| = |TD| = |AG|
|CG| = |GT| ve |CE| = |DE| ise TD // AE'dir.

$$\frac{|BD|}{|BE|} = \frac{|TD|}{|AE|} = \frac{2}{3} = \frac{|BD|}{|BD|+|EC|}$$

$$\Rightarrow \frac{|BD|}{|EC|} = 2 \Rightarrow (c)$$

10.

$$A = 1!\cdot 1!\cdot 2\cdot 3!\cdot 3!\cdot 4\cdot 5!\cdot 5!\cdot 6 \cdots 99!\cdot 99!\cdot 100$$

$$= 1!^2\cdot 3!^2\cdot 5!^2 \cdots 99!^2\cdot 2\cdot 4\cdot 6 \cdots 100$$

$$= (1!\cdot 3!\cdot 5! \cdots 99!)^2\cdot 2\cdot 1\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 3 \cdots 2\cdot 50$$

$= (1!\cdot 3!\cdot 5! \cdots 99!)^2\cdot 2^{50}\cdot 50! \Rightarrow$ 50! içindeki 47, 43 gibi asallar tam kare olma durumunu bozacağından şıklardan $\frac{A}{50!}$ dışındakiler tam kare olamaz. $\Rightarrow$ (d)

11.

Bu bağıntı ile bir dizi oluşturduğunu düşünelim.

$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{999} = 2^{1000}+1$, $a_n = 2a_{n-1} - 1$ indirgeme bağıntısına göre oluşmaktadır. Gerekli düzenlemeler yapılıp teleskopik toplam yapıldığında a_1 bulunabilir.

$$
\begin{aligned}
2^{997}/\quad & a_2 - 2a_1 = -1 \\
& a_3 - 2a_2 = -1 \\
& \vdots \\
2^{2}/\quad & a_{997} - 2a_{996} = -1 \\
2^{1}/\quad & a_{998} - 2a_{997} = -1 \\
+\quad & a_{999} - 2a_{998} = -1 \\
\hline
\end{aligned}
$$

$$\Rightarrow a_{999} - 2^{998}\cdot a_1 = -\left(1+2+2^2+\cdots 2^{997}\right)$$

$$2^{1000}+1-2^{998}\cdot a_1 = -\frac{2^{998}-1}{2-1} = -2^{998}+1$$

$$\Rightarrow 2^{998}\cdot a_1 = 2^{1000}+2^{998} \Rightarrow a_1 = 4+1 = 5$$

$$\Rightarrow (e)$$

12.

1'i merkeze alacak şekilde düşünülebilecek bir kenarı tek sayı olması gereken karelerin içine sarmal bir şekilde 1'den başlayarak sayma sayılar yerleştirildiğinde en sağ üst köşedeki kareye $(2n+1)^2$ gelecektir. 1'in 100 kare üstüne ise $(2\cdot 100+1)^2-100$ gelecektir. Sayılar 5'li sistemde yerleştirildiğinde $(2\cdot 100+1)^2-100 \equiv 1 \pmod 5$ bulunur. $\Rightarrow$ (a)

7	8	9
6	1	2
5	4	3

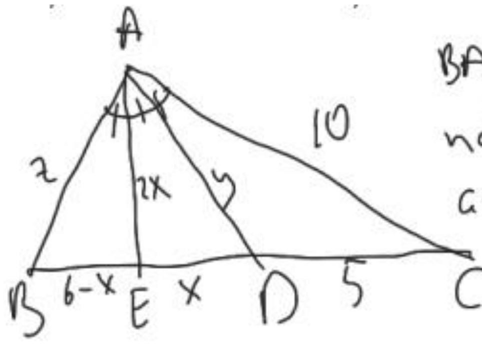
$\rightarrow 3^2$

21	22	23	24	25
20	7	8	9	10
19	6	1	2	11
18	5	4	3	12
17	16	15	14	13

$\rightarrow 5^2$

. . .

13.



BAD açısının açıortayının BD'yi kestiği nokta E olsun. AEC ve ABD üçgenlerinde açıortay teoremi ve uzunluk formülleri uygulandığında $y^2=15x$, $\frac{y}{x}=\frac{7}{6-x}$ denklikleri elde edilir. Denklemler ve $4x^2=7y-x(6-x)$ denkliğinde düzenlendiğinde $4x^2=\frac{y}{x}(6-x)y-6x+x^2$

$y^2=15x$ kullanılır. $4x^2=\frac{15\cancel{x}}{\cancel{x}}(6-x)-6x+x^2 \Rightarrow 3x^2+21x-90=0$

$\Rightarrow x^2+7x-30=(x+10)(x-3)=0 \Rightarrow x=3 \Rightarrow AE \perp BC$ gelir.

$A(ADC)=\frac{5.6}{2}=15 \Rightarrow (a)$

14.

$a^2=2b^3=3c^5=A$ olsun. A sayısı 2 ve 3'ün katıdır. $A=2^x\cdot3^y$ şeklinde olmalıdır. A'nın en küçük olması için $a=2^{k_1}\cdot3^{m_1}$, $b=2^{k_2}\cdot3^{m_2}$ ve $c=2^{k_3}\cdot3^{m_3}$ alarak düzenleme yapıldığında x ve y için en küçük değere ulaşılır.

$3\cdot(2^{k_3}\cdot3^{m_3})^5=2^x\cdot3^y \Rightarrow$

$2^{k_1}\cdot3^{m_1}=2\cdot(2^{k_2}\cdot3^{m_2})^3=$ $2^{5k_3}\cdot3^{5m_3+1}=2^x\cdot3^y \Rightarrow$

$2^{k_1}\cdot3^{m_1}=2^{3k_2+1}\cdot3^{3m_2}=$ $y=m_1=3m_2=5m_3+1$

$x=k_1=3k_2+1=5k_3$ ve $y=m_1=3m_2=5m_3+1$

$x=10$ ve $y=6$ olarak bulunur. $a=2^5\cdot3^3$, $b=2^3\cdot3^2$ ve $c=2^2\cdot3$

$\Rightarrow a\cdot b\cdot c=2^{10}\cdot3^6 \Rightarrow$ pozitif bölen sayısı $(10+1)(6+1)=77$

$\Rightarrow (d)$

15.

$$(x+1)+(x+2)+(x+3)\ldots+(x+10)=2006+y$$

y çıkarılan sayı ve $x+1 \leq y \leq x+10$ 'dur.

$$10x+\frac{10.11}{2}=2006+y \Rightarrow 10x+55=2006+y$$

$$\Rightarrow 10x=1951+y \Rightarrow x=217 \text{ ve } y=219 \Rightarrow (C)$$

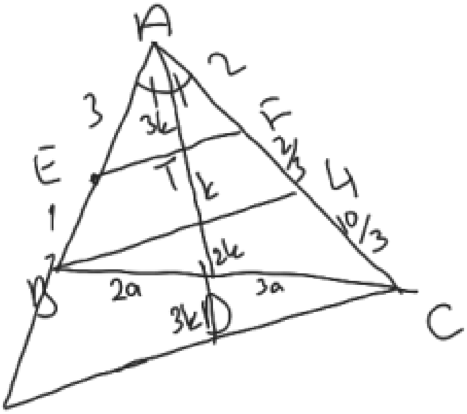
16.

Öncelikle kümedeki elemanları 3'e bölünmelerinden kalanlarına göre 3 kümeye ayıralım.

$A=\{1,4,7,\ldots 97\}$, $B=\{2,5,8,\ldots 98\}$, $C=\{3,6,9,\ldots 99\}$

Bu durumda C'deki herhangi iki eleman aynı kümeye gelmemelidir. Buda en az 33 ayrık küme ile yapılabilir. A'dan ve B'den herhangi iki eleman aynı kümeye gelmeyecek şekilde A ve B'nin elemanları da bu 33 kümeye dağıtılabilir. $\Rightarrow$ (C)

17.



B'den ve C'den EF'ye paralel çizilir ve Thales benzerliğinden parçaların oranları bulunabilir.

$\Rightarrow \dfrac{|AT|}{|TD|} = \dfrac{3k}{3k} = 1 \Rightarrow (e)$

18.

Çift sayıları çok kullanmak doğru olacaktır. Tek sayılar konusunda dikkatli olmamız gerekir. En küçük asal sayılardan 3, 5 ve 7 tablodaki 20 haneyi doldurmada yeterli olacaktır. 11'i alacak olursak 22 alınmış olsa bile 33'ü almak gerekeceği için 11 siz çözüm bizi en küçük n sayısına götürecektir. Kullanacağımız sayılar 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18, 20, 21, 22, 24, 25, 26 olacaktır.

7	21	6	3	9
14	18	26	12	15
4	8	24	10	25
2	16	22	20	5

$\Rightarrow (c)$

19.

$x^2 - bx + 72000 = 0$

$-1 \quad -72000$
$-2 \quad -36000$
$-3 \quad -24000$
$\vdots$

Bu durumda çarpımları 72000 den negatif ertd sayı ikililerinin kaç tane olduğunu bulmak gerekir.

$72000 = 2^6 \cdot 3^2 \cdot 5^3$ Negatif bölen sayısı

$(6+1)(2+1)(3+1) = 84$ bunların içinde $(2+1)(3+1) = 12$

tanesi tektir. $\frac{84 - 12 \cdot 2}{2} = 30 \Rightarrow (c)$

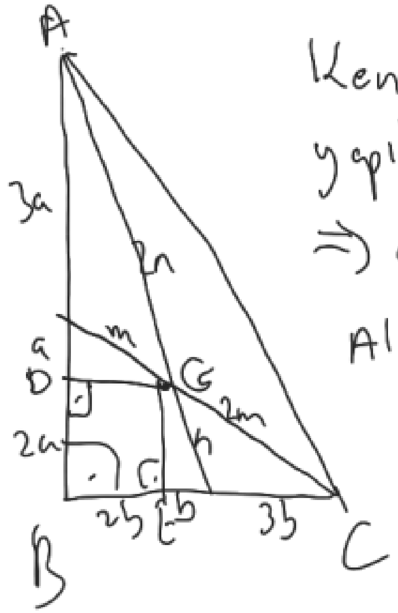
20.

Sırasıyla "+", "−" ve "0" sayıları a, b ve c ise n sorulok bir sınavda $a+b+c=n$'in farklı çözüm sayısının 55 olduğu veriliyor. n özdeş topun 3 farklı kaba dağılımından $\binom{n+3-1}{3-1} = 55$ gelir.

$$\binom{n+2}{2} = \frac{(n+2)(n+1)}{2 \cdot 1} = 55 \Rightarrow (n+2)(n+1) = 110$$

$$\Rightarrow n = 9 \Rightarrow (b)$$

21.



Kenarortaylar çizilip gerekli oranlamalar yapıldığında $A(GDBE) = 2a\cdot 2b = 4ab = 40$

$\Rightarrow a\cdot b = 10$ bulunur.

$$Alan(ABC) = \frac{6a\cdot 6b}{2} = 18ab = 18\cdot 10 = 180$$

$\Rightarrow$ (b)

22.

$$a\cdot b = \frac{26\cdot 27}{2} - a - b \Rightarrow a\cdot b + a = -b + 351 \Rightarrow$$

$$a(b+1) = -b + 351 \Rightarrow a = \frac{-b+351}{b+1} = -1 + \frac{352}{b+1}$$

$\Rightarrow b+1 \mid 352$. $1 \leq a \leq 26$ ve $1 \leq b \leq 26$

$\Rightarrow b = 21$, $a = 15$ veya $a = 15$, $b = 21$ olur.

$|a-b| = 6 \Rightarrow$ (d)

23.

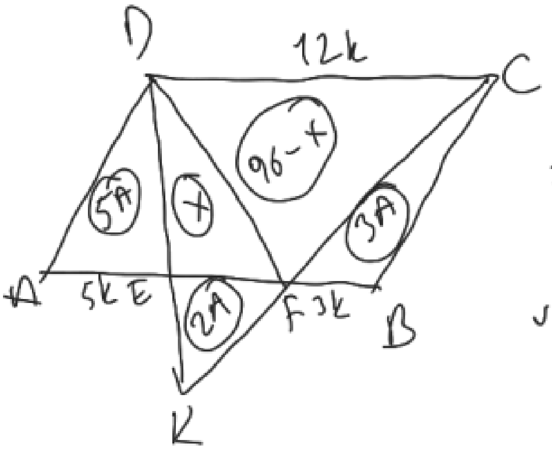
Dizinin 3'ün kuvvetleri kullanılarak oluşturulması bize 3 tabanı fikrini vermektedir. Fakat sadece 0 ve 1 rakamlarını kullanabiliriz çünkü 3'ün herhangi bir kuvveti 2 kere toplanmayacak. Sadece 0 ve 1 kullanmamız ise 2 tabanında oluşabilecek 100'üncü sayıyı bulmamızla sonuca gidebileceğimizi anlamına gelir. $100 = (1100100)_2 \Rightarrow$ Dizinin 100. sayısı $(1100100)_3 = 3^6 + 3^5 + 3^2 = 981$ bulunur. $\Rightarrow$ (b)

24.

Eğer birler basamağına 1 ya da 3 yazılacak olursa onlar basamağı 2 almalıdır. Bu durumda yüzler basamağı 1 ya da 3 ve binler basamağı 2 şeklinde devam eder. Bu durumda $2^5 = 32$ tane yazılır.

Eğer birler basamağına 2 yazılacak olursa onlar basamağı 1 ya da 3 olacaktır. Benzer düşünceyle burada da $2^5 = 32$ tane yazılır. Toplamda $32 + 32 = 64$ tane yazılabilir. $\Rightarrow$ (c)

25.



$\frac{A(ABCD)}{2} = A(DFC) = 96 - x = 8A + x$

$\Rightarrow 48 = x + 4A$ ve $\frac{|KE|}{|ED|} = \frac{2A}{x}$

ve $\frac{|KF|}{|FC|} = \frac{x+2A}{96-x}$ ve $\frac{|KE|}{|ED|} = \frac{|KF|}{|FC|}$ olduğundan

$\frac{2A}{x} = \frac{x+2A}{96-x} \Rightarrow x^2 + 4Ax - 192A = 0$ ve $48 = x + 4A$'dan

$x^2 - 16A^2 = 0 \Rightarrow x = 4A \Rightarrow |AE| = 5k,\ |EF| = 4k,\ |FB| = 3k$

ise $|DC| = 12k$ olur. $A(DEFC) = 96\,cm^2 \Rightarrow A(ABCD) = 144\,cm^2$

$\Rightarrow (b)$

26.

a) 0 b) 2 c) 4 d) 6 e) hiçbiri

$\frac{1}{31} = 0,a_1a_2a_3 \dots a_{2021}a_{2022}\dots$ her iki tarafı 10^{2021} ile çarpalım.

$\frac{10^{2021}}{31} = a_1a_2\dots a_{2021},a_{2022}\dots$ ifadesinin kesir kısmını bulmak için 10^{2021}'in 31'e bölümünden kalanı bulucaz. $2021 \equiv 11 \pmod{30}$ olduğundan

$10^{30} \equiv 1 \pmod{31}$ Fermat teoreminden.

$10^{2021} \equiv 10^{11} \equiv (10^2)^5 \cdot 10 \equiv 7^5 \cdot 10 \equiv 7^2 \cdot 7^2 \cdot 7 \cdot 10 \equiv 18 \cdot 18 \cdot 70 \equiv 19 \pmod{31}$

Kesir kısım $\frac{19}{31}$ geldi. Ondalığa çevirirsek $190 : 31 = 0,6\dots$, $190 - 186 = 4$

$\Rightarrow a_{2022} = 6 \Rightarrow (d)$

27.

1000 100 10

ifadeyi toplam sembolüyle gösterelim. $\sum_{n=1}^{99} \frac{1}{(n+1)\sqrt{n} + n\sqrt{n+1}} =$

$$\sum_{n=1}^{99} \frac{1}{\sqrt{n+1}\cdot\sqrt{n}\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)} = \sum_{n=1}^{99} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}\cdot\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{99}\left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)$$

$(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$

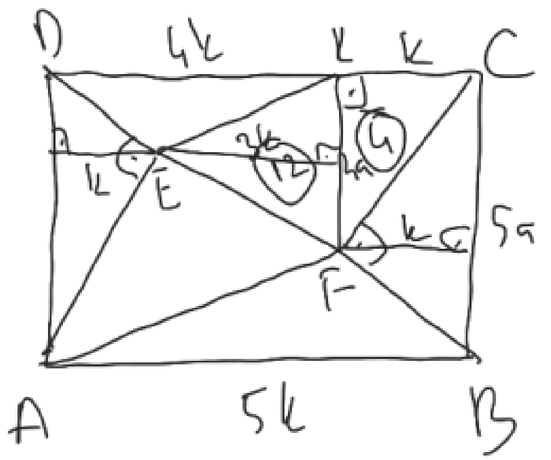
$$= \left(\frac{1}{\sqrt{1}} - \cancel{\frac{1}{\sqrt{2}}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{\sqrt{2}}} - \cancel{\frac{1}{\sqrt{3}}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{\sqrt{3}}} - \cancel{\frac{1}{\sqrt{4}}}\right) + \dots \left(\cancel{\frac{1}{\sqrt{99}}} - \frac{1}{\sqrt{100}}\right)$$

$$= \frac{1}{1} - \frac{1}{10} = \frac{9}{10} \Rightarrow (c)$$

28.

Uzunluğu n olan siyahla başlayıp siyahla biten barkod sayısı a_n, siyahla başlayıp beyazla bitenlerin sayısı da b_n olsun. $a_1=1$, $b_1=0$, $a_2=1$, $b_2=1$, $a_3=1$, $b_3=2$. $n \geq 4$ olsun. Son şeridin genişliği ya 1 yada 2'dir. Dolayısıyla $a_n = b_{n-1} + b_{n-2}$; $b_n = a_{n-1} + a_{n-2}$. O halde $a_4=3$; $b_4=2$, $a_5=4$, $b_5=4$, $a_6=6$, $b_6=7$; $a_7=11$, $b_7=10$; $a_8=17$, $b_8=17$, $a_9=27$, $b_9=28$; $a_{10}=45$, $b_{10}=44$, $a_{11}=72$; $b_{11}=72$; $\boxed{a_{12}=116}$ $\Rightarrow$ (e)

29.



E'den KF'ye inilen dikmenin uzunluğu $|KC|$'nin 3 katı olacaktır. Buradan $|DK| = 4|KC|$ ve $5|KF| = 4|CB|$ bulunur.

$$A(KFC) = \frac{|KF|\cdot|KC|}{2} = 4 \Rightarrow$$

$$A(DEA) = A(AFD) = \frac{|CB|\cdot|KC|}{2} = 5$$

$$A(ABCD) = |DC|\cdot|CB| = 50 \Rightarrow A(AEF) = 15 \Rightarrow (d)$$

30.

$x^3+3x^2+4x+2 \equiv 0 \pmod{30} \Rightarrow 2|30,\ 3|30$ ve $5|30$ olduğundan

$x^3+3x^2+4x+2 \equiv 0$ [mod 2, mod 3 ve mod 5] olmalıdır.

mod 2'de her tam sayının sağladığı görülüyor.

$x^3+3x^2+4x+2 \equiv 2x+2 \equiv 0 \pmod 3 \Rightarrow x = 3k+2 \quad (1)$

$x^3+3x^2+4x+2 \equiv x^3-2x^2-x+2 \equiv x^2(x-2)-(x-2) \equiv (x-2)(x^2-1) \equiv$

$(x-2)(x-1)(x+1) \equiv 0 \pmod 5 \Rightarrow x = 5a+1,\ 5b+2,\ 5c+4 \quad (2)$

(1) ve (2) Çin Kalan Teoreminden birleştirilirse

$x = 15m+2,\ 15n+11$ ve $15t+14 \Rightarrow 0 \le x < 30$ aralığında

$\{2, 11, 14\} \Rightarrow 3$ tane $\Rightarrow (d)$

31.

$f(x+2y)+f(2x-y)=3f(x)+f(y)$

$x=y=0 \Rightarrow 2f(0)=4f(0) \Rightarrow f(0)=0$

$y=0 \Rightarrow f(x)+f(2x)=3f(x) \Rightarrow f(2x)=2f(x)$

$y=x \Rightarrow f(3x)+f(x)=3f(x)+f(x) \Rightarrow f(3x)=3f(x)$. $k>3$ olsun.

$f(4x)=f(2\cdot 2x)=2f(2x)=4f(x)$. x yerine $3x$, y yerine $2x$ alırsak, $f(7x)+f(4x)=3f(3x)+f(2x) \Rightarrow f(7x)=7f(x)$

$x=0$ alırsak $f(2y)+f(-y)=3f(0)+f(y) \Rightarrow f(-y)=-f(y)$

Şimdi $7\neq k>4$ olsun ve $|n|<k$ olmak üzere her n tam sayısı için $f(n)=nf(x)$ olduğunu varsayalım.

$i=0,1,2,3$ olmak üzere $k=4m+i$ olsun. x yerine $[2(m-1)+i]x$ ve y yerine $(m+1)x$ yazarsak.

$f(kx)+f((3m+2i-5)x)=3f((2m+i-2)x)+f((m+1)x)$

$|3m+2i-5|, |2m+i-2|, |m+1|<k$ olduğundan $f(kx)=kf(x)$

O halde $30=f(129)=129\cdot f(1) \Rightarrow f(1)=\frac{30}{129}=\frac{10}{43}$,

buradan da $f(2021)=2021\cdot f(1)=2021\cdot\frac{10}{43}=470$ bulunur

32.

99 hamle sonunda tahtada tek bir sayı kalır.

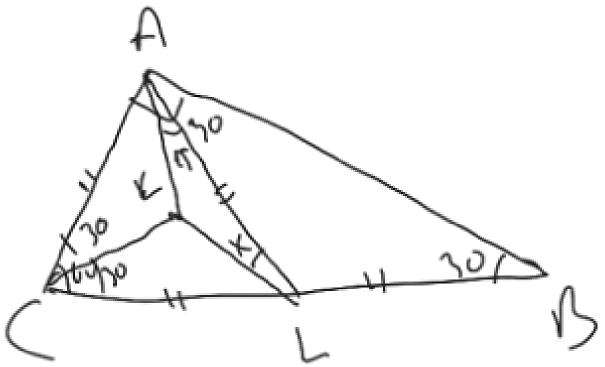
Her hamlede tahtadaki sayıların toplamı 1 eksilir.

Başlangıçta $10\cdot(1+2+\cdots 10)=10\cdot\frac{10\cdot 11}{2}=550$ dan

bu toplam $550-99=451$ olur $\Rightarrow$ (b)

BUMİN DENEME ÇÖZÜMLER

1.



ACL eşkenar üçgeni için CK simetri ekseni olduğundan

$m(\widehat{KAL}) = m(\widehat{KLA}) = 15^\circ \Rightarrow (a)$

2.

$(100-99)(100+99)\cdot(99-98)(99+98)\ \ldots\ (2-1)(2+1)$

$= 199\cdot197\cdot195\ \ldots\ 3 = \dfrac{199!}{198\cdot196\ldots2} = \dfrac{199!}{99\cdot2\cdot98\cdot2\ldots1\cdot2}$

$= \dfrac{199!}{2^{99}\cdot99!}$ De Polignac teoreminden 199! ve 99!'ın içindeki 5 çarpan sayısı bulunabilir.

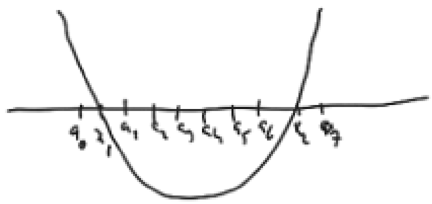
$199 \,|\, 5 \to 39 \,|\, 5 \to 7 \,|\, 5 \to 1$; $39+7+1 = 47$

$99 \,|\, 5 \to 19 \,|\, 5 \to 3$; $19+3 = 22$

$\Rightarrow 47-22 = 25 \Rightarrow (a)$

3.

$x^2-(n+12)x-5n=0$ denkleminin kökleri x_1 ve x_2 olsun. Parabol olarak düşünecek olursak;



$\Rightarrow a_6 < x_2 < a_7$ ve $a_0 < x_1 < a_1 \Rightarrow 5 < x_2 - x_1 < 7$

$\Rightarrow 5 < \frac{\sqrt{\Delta}}{a} < 7 \Rightarrow 5 < \sqrt{(n+12)^2+20n} < 7$

$\Rightarrow 5 < \sqrt{n^2+24n+4} < 7 \Rightarrow 25 < n^2+24n+4 < 49$

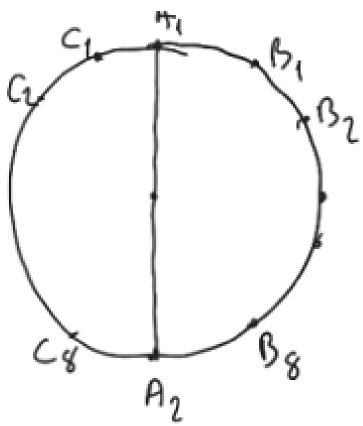
$\Rightarrow 25 < (n+12)^2-140 < 49 \Rightarrow 165 < (n+12)^2 < 189$

$\Rightarrow \sqrt{165}-12 < n < \sqrt{189}-12$ veya $-\sqrt{165}-12 > n > -\sqrt{189}-12$

$n \in \mathbb{Z}^-$ olduğundan $n=-25$ olur. $|-25|=25$ rakamları toplamı

$7 \Rightarrow (c)$

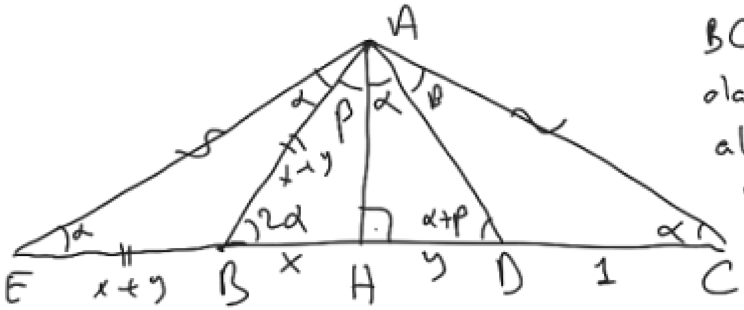
4.



$[A_1A_2]$'yi çap kabul edersek buna göre simetrik alınan $A_1\hat{B}_1C_1$, $A_1\hat{B}_2C_2$ ... gibi üçgenler ikizkenar olacaktır. $[A_1A_2]$ çapı 9 şekilde belirlenebilir. $B_1, B_2, \ldots B_8$ noktasıda 8 şekilde belirlenir. Üçgenin tepe noktası A_1, A_2'den 2 şekilde belirlenir. Buradan $9 \cdot 8 \cdot 2 = 144$ bulunur. Fakat $A_1\hat{B}_6C_6$, $B_1\hat{B}_7C_5$ ... gibi eşkenar üçgenlerin her biri 3 kere sayıldığından 2 kere çıkarılması gerekir. Eşkenar üçgen sayısı 6'dır. Buradan ikizkenar üçgen sayısı $144-2\cdot 6 = 132$ bulunur.

İstenen olasılık ise $\frac{132}{\binom{18}{3}} = \frac{11}{68} \Rightarrow (a)$

5.



BC doğrusu üzerinde $|AB|=|BE|$ olacak şekilde bir E noktası alındığında $\overset{\triangle}{ABE}$ ve $\overset{\triangle}{AEC}$ ikizkenar üçgen dir. $m(\widehat{BAD})=m(\widehat{ADB})$ olduğundan $\overset{\triangle}{BAD}$ de ikizkenar üçgen olarak bulunur. $|DC|=1$ ve $|BH|=x$ alınırsa $\frac{|BH|}{|DC|}=\frac{x}{1}=x$ dır. x'i bulduğumuzda cevabı bulmuş oluruz. $|HD|=y$ dersek $|AB|=|EB|=x+y$ bulunur. $|EH|=|HC|$ olduğundan $2x+y=y+1 \Rightarrow 2x=1 \Rightarrow x=\frac{1}{2} \Rightarrow$ (c)

6.

$$3^{256}-1=(3-1)(3+1)(3^2+1)(3^4+1)(3^8+1)\cdot(3^{16}+1)\cdot(3^{32}+1)(3^{64}+1)(3^{128}+1)$$

$3^{2n}+1 \not\equiv 0 \pmod 4$ ve $3^{2n}+1 \equiv 0 \pmod 2$ olduğundan n'nin en büyük değeri 10 olabilir. $\Rightarrow$ (d)

7.

$(x+y+z)^2 = x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx) = x^2+y^2+z^2+6 = 25$

$\Rightarrow x^2+y^2+z^2 = 19$ ve $x\cdot y+y\cdot z+z\cdot x = xy+z(y+x)$

$= xy+z(5-z) = 3 \Rightarrow x\cdot y = 3-5z+z^2$

A-G-O eşitsizliğinden $x^2+y^2 \geq 2xy \Rightarrow$

$x^2+y^2 = 19-z^2 \geq 2xy = 2\cdot(3-5z+z^2)$

$\Rightarrow 19-z^2 \geq 6-10z+2z^2$

$0 \geq 3z^2-10z-13$

$0 \geq (3z-13)\cdot(z+1)$

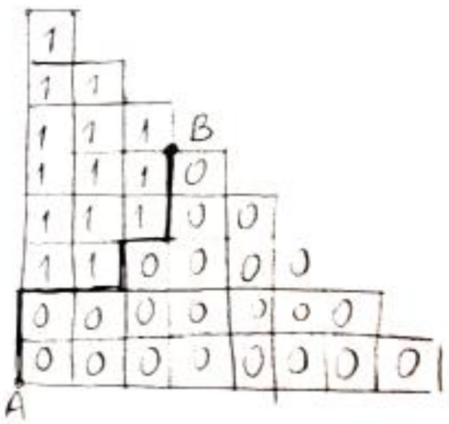
	-1		$13/3$	
$+$		$-$		$+$

$z \in \left[-1, \frac{13}{3}\right] \Rightarrow z$ en çok $\frac{13}{3}$ dür

$\Rightarrow$ (b)

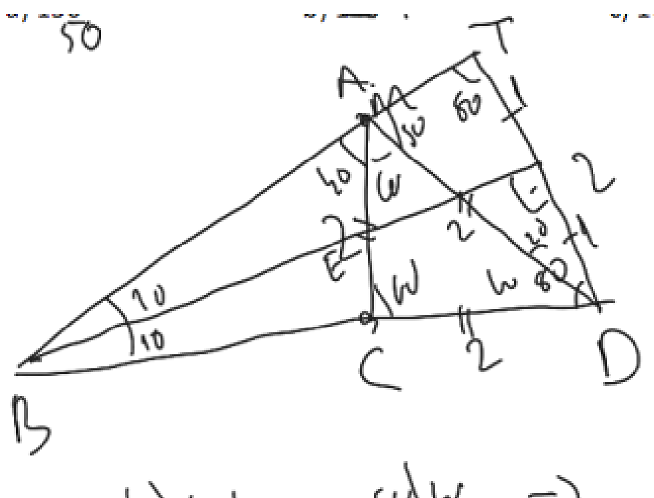
8.

Tablonun her doldurulma şekline A noktasında başlayan, 8 tane sağa veya yukarıya adımdan sonra "merdiven"lere ulaşan bir kırık çizgi karşılık geliyor.



Bu kırık çizgilerden her biri S(sağ) ve Y(yukarı) harflerinden oluşan 8 harfle kelimelerle kodlanabilir. Örneğin şekildeki doldurmaya YYSSYSYY kelimesi karşılık gelir. Bunun birebir ve örten eşleme olduğu açıktır. Bu kelimelerin sayısı $2^8 = 256$'dır.

9.



BA uzatılarak BTD ikizkenar üçgeni oluştururuz. Üçgen içerisinde $\overset{\triangle}{MCD}$ eşkenar üçgen olacak şekilde bir M noktası seçildiğinde M'nin A'da olması gerektiğini görürüz. $\Rightarrow m(B\hat{A}C) = 40^\circ \Rightarrow$ (b)

10.

Sondaki kaç basamağının sıfır alacağı ifadenin içinde kaç tane 5 çarpanı olduğuyla ilgilidir. Her çarpanda taban ile üssün toplamının 101 olmasından faydalanılabilir. Böylece 5'in katları üzerinden işlem devam eder. $5^{96} \cdot 10^{91} \cdot 15^{86} \cdots 95^{6} \cdot 100^{1}$. Burada 25'in katlarında 2 şer tane 5 çarpanı geleceği unutulmamalıdır.

$$1+6+11+\ldots 96 + 76 + 51 + 26 + 1 = 1124 \Rightarrow (b)$$

11.

$$\frac{z}{x+y} + \frac{x}{y+z} + \frac{y}{x+z} = \frac{7-(x+y)}{x+y} + \frac{7-(y+z)}{y+z} + \frac{7-(x+z)}{x+z}$$

$$= \frac{7}{x+y} - 1 + \frac{7}{y+z} - 1 + \frac{7}{x+z} - 1 = 7\left(\frac{1}{x+y} + \frac{1}{y+z} + \frac{1}{x+z}\right) - 3$$

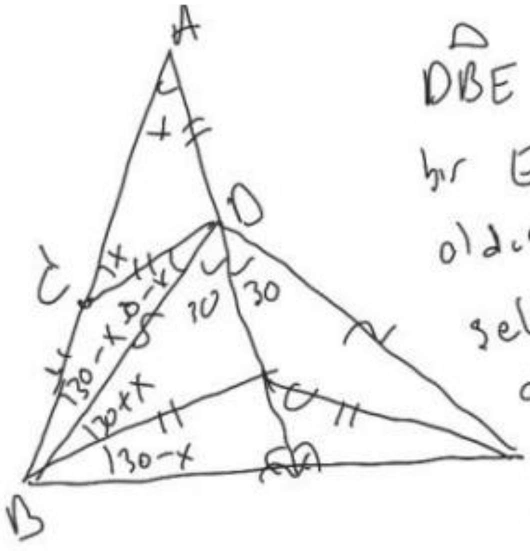
$$= 7 \cdot \frac{7}{10} - 3 = \frac{49}{10} - 3 = \frac{19}{10} \Rightarrow (a)$$

12.

20 kutuya 2 özdeş topun dağılımı sayısı kadar rakamları toplamı 2 olan sayı olduğu söylenebilir.

$$\binom{2+20-1}{20-1} = \binom{21}{19} = \binom{21}{2} = \frac{21 \cdot 20}{2} = 210 \Rightarrow (b)$$

13.



$\hat{DBE}$ eşkenar üçgen olacak şekilde bir E noktası alalım. $|BE|=|BD|$ olduğu için $[BD]$ ile $[BE]$ çakışacak şekilde $\hat{CBE}$ üçgenini döndürecek olursak C'nin AB'de geldiği noktaya C' diyelim.

$|BC'|=|C'D|=|AD|$ olduğundan $60-2x=x$

$3x=60 \Rightarrow x=20 \Rightarrow$ (d)

14.

Bu sayı 9 ve 8 ile tam bölünmelidir. 8'e bölünme kuralından son 3 basamağın 8'in katı olması gerekir. En büyük sayıyı oluşturmak istediğimizden en küçük rakamları son 3 basamağa yerleştirmeliyiz. 0, 1 ve 2'yi son 3 basamağa

9 8 7 6 5 4 3 1 2 0 $7+1=8 \Rightarrow$ (c)

15.

$a_1, a_2, a_1+a_2, 2(a_1+a_2), 2^2(a_1+a_2), 2^3(a_1+a_2) \ldots$

Dizinin n. terimi $2^{n-3}(a_1+a_2)$ dır

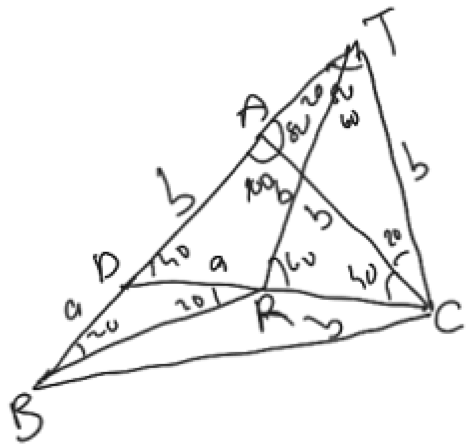
12. terim $2^9 \cdot (a_1+a_2) = 1000$ ve $a_1 = 1 \Rightarrow a_2 = \frac{61}{64} \Rightarrow$ (d)

16.

a) 2 b) 4 c) 5 d) 6 e) 10

Önce paraları 33,33,34 şeklinde 3 gruba ayırıp 33'lükleri tartalım. Eşit gelirse hafif para 34'lük grupta, eşit gelmezse hafif gelen 33'lü gruptadır. Böylece paraların $\frac{2}{3}$'sini elemiş olduk. Bir sonraki adımda da hafif paranın bulunduğu grubu 3 altgruba bölerek yaklaşık $\frac{2}{3}$'sini eleriz v.s. Böylece şüpheli para sayısı bu adımlar sonucu en fazla 34'e, 12'ye, 4'e, 2'ye ve 1'e düşecek dolayısıyla en geç 5. adım sonucu hafif olan parayı bulacağız. Öte yandan her tartıda 3 farklı sonuç olabilir, dolayısıyla 4 tartı sonucu en fazla $3^4 = 81$ durumu ortaya çıkarabiliriz. 100 paradan birinin hafif olma durumu 100 farklı şekilde olabildiğinden 4 tartı yeterli değildir.

17.



AC üzerinde $|AC| = |CT|$ olacak şekilde bir T noktası alınır. $[DC]$ üzerinde alınan R noktası sayesinde $\widehat{TRC}$'nin eşkenar üçgen olması sağlanır. Bu durumdan $\widehat{DBR}$ ikizkenar üçgen olurken $m(\widehat{TBR}) = m(\widehat{BTR}) = 20^\circ$ olur. Buradan $\widehat{RTB}$ de ikizkenar üçgen olur. $|TR| = |BR| = |RC| \Rightarrow m(\widehat{DCB}) = 10^\circ$

$\Rightarrow$ (b)

18.

$A + 2018$ işlemindeki eldelerin sayısı e olmak üzere $S(A+2018) = S(A) + S(2018) - 9e = S(A) + 11 - 9e$. Dolayısıyla $S(A+2018) = S(A) + 2$ olması için $e = 1$ olmalı. $A = abcd$ olsun. $e = 1$ 3 şekilde olabilir: 1) $d \geq 2$, $c \leq 7$, $b \leq 9$, $1 \leq a \leq 7$ $7 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 8 = 4480$ yolla olabilir. 2) $d \leq 1$, $c = 9$, $b \leq 8$, $1 \leq a \leq 7$, bu da $2 \cdot 1 \cdot 9 \cdot 7 = 126$ yolla olabilir. 3) $d \leq 1$, $c \leq 8$, $b \leq 9$, $a \geq 8$, bu da $2 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 2 = 360$ yolla olabilir. $4480 + 126 + 360 = 4966$

19.

Başlangıçtaki fındık sayısı a_0 ve $i=1,2,..,5$ olmak üzere her i. çocuktan sonra geriye kalan fındık sayısı a_i olsun. O halde her $i=1,...,5$ için $a_i = \frac{4}{5}\cdot(a_{i-1}-1)$ veya $5a_i = 4a_{i-1}-4$. Her iki tarafa 20 ekleyelim $5a_i+20 = 4a_{i-1}+16$. $b_i = a_i+4$ alırsak $5b_i = 4b_{i-1}$ elde ederiz. Bu eşitlikleri $i=1,2,...,5$ için yazıp taraf ~~tarafa~~ çarparsak $5^5 b_5 = 4^5 b_0$, buradan da $b_0 = \frac{5^5 b_5}{4^5}$ elde edilir. O halde $4^5 | b_5 \Rightarrow b_5 = 4^5 \cdot c \Rightarrow a_5 = 4^5 c - 4$. $a_5 \equiv 0 \pmod 5 \Rightarrow 4^5 c \equiv 4 \pmod 5 \Rightarrow c \equiv 1 \pmod 5$. En küçük a_0'ı aradığımız için $c=1$ alınmalı. $\Rightarrow b_5 = 4^5 \Rightarrow b_0 = 5^5 \Rightarrow a_0 = 5^5 - 4 = 3121$

20.

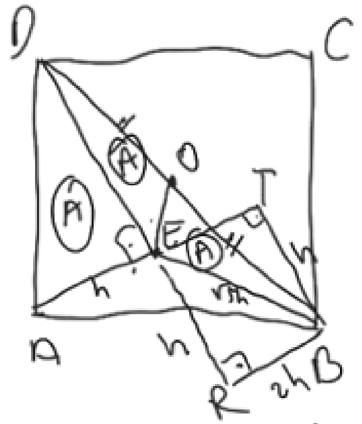
11 kent birbiriyle uçak seferleriyle bağlı olsun ve 12. kentten hiçbir kente uçak seferi olmasın. Bu durumda sefer sayısı $\binom{11}{2} = 55$ olur ve birinden diğerine ulaşılamayan 2 kent bulunuyor. Öte yandan birinden diğerine ulaşılamayan iki A ve B kenti bulunuyorsa A'dan ulaşılabilen kent sayısı (A dahil) n olsun: $1 \le n \le 11$. Bu durumda toplam sefer sayısı en fazla

$$\binom{n}{2} + \binom{12-n}{2} = \frac{n^2-n}{2} + \frac{(12-n)(12-n-1)}{2} = n^2 - 12n + 66 \text{ olur.}$$

$1 \le n \le 11$ olduğundan $12n - n^2 = n(12-n) \ge 11$, dolayısıyla $n^2 - 12n + 66 = 66 - (12n - n^2) \le 66 - 11 = 55$.

Cevap: 55

21.



O noktası [DB] köşegeni üzerinde olduğundan $Alan(\overset{\triangle}{DOE}) = Alan(\overset{\triangle}{OEB})$ dur. [DE] kenarı $\overset{\triangle}{DEA}$ ve $\overset{\triangle}{BDE}$ üçgenleri için ortaktır. $Alan(\overset{\triangle}{BDE}) = 2\,Alan(\overset{\triangle}{DEA})$ olduğundan yükseklikleri oranı da 2 olacaktır.

Karenin içinde alınan T noktası için $\overset{\triangle}{DEA} \cong \overset{\triangle}{ATB}$ olduğundan $|AE| = |TB| = |RE| = \frac{|RB|}{2}$ dur.

$$\Rightarrow \frac{|AE|}{|EB|} = \frac{1}{\sqrt{5}} \Rightarrow (c)$$

22.

a, b ve n tek ve çift olmaları açısından incelendiğinde hepsinin çift olduğu sonucuna varılır. Bu durumda $a=2$, $b=2k$, $k \in Z$ olsun $n = 4+4k^2 = 4(1+k^2)$ olur ve $2k \mid n$ olduğundan $n = 2kt$, $t \in Z$ $\Rightarrow$ $2kt = 4(1+k^2)$ $\Rightarrow$ $k \cdot t = 2(1+k^2)$ eşitliğinde

$k \nmid 1+k^2 \Rightarrow k \mid 2 \Rightarrow k=1$ ve $k=2$ olabilir.

$k=1$ için $n = 2^2+2^2 = 8$, $k=2$ için $n = 2^2+4^2 = 20$ $\Rightarrow 28 \Rightarrow (d)$

23.

Çözüm: $\sqrt{n}+\frac{p}{\sqrt{n}} = k^2$ ve k bir doğal sayı olsun. ki tarafında karesini alırsak.$n+2p+\frac{p^2}{n} = k^4$ elde ederiz. Buradan $n$nin p'yi bölmesi gerekir.p asal sayı ise $n = 1$,$n = p$ ya da $n = p^2$ olur.Eğer $n = p$ ise denklemimiz $p + 2p + p = k^4$ ya da $4p = k^4$ olur.Buradan k nın çift olması gerekir ve p nin 4'e bölünmesi gerekir.Bu mümkün değildir. Eğer $n = 1$ ya da $n = p^2$ olursa $1 + 2p + p^2 = k^4$ ya da $1 + p = k^2$ olur.$p = (k-1)(k+1)$ bunun sonucunda $k = 2$ iken $p = 3$ iki çözüm olur. $n = 1$ ve $p = 3$,$n = 9$ ve $p = 3$

24.

Çözüm: Şekil 2'de başka bir çember üzerinde daireler, çekirgeler sadece komşu dairelere gidebilecek şekilde yerleştirilmiştir. Bir dairede iki çekirge aynı anda bulunamayacağı için bu çember üzerinde çekirgelerin sırası değişmeyecek. İlk başta çekirgeler saat yönünde $A, K, Ç, P$ şeklinde olduğundan diğer sıralamalar da bu şekilde olacak, dolayısıyla $1, 2, 3, 4$ dairelerindeki diğer yerleşim şekilleri

$$(P, K, A, Ç);\ (Ç, A, P, K)\ \text{ve}\ (K, P, Ç, A)$$

gibi olacak.

25.

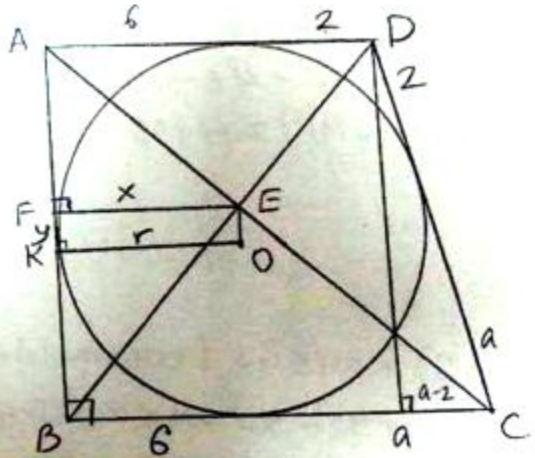
$(a+2)^2-(a-2)^2 = 12^2 \Rightarrow 2a\cdot 4 = 144 \Rightarrow a = 18$

$A\hat{F}E \sim A\hat{B}C \Rightarrow \frac{x}{24} = \frac{6-y}{12}$

$B\hat{F}E \sim B\hat{A}D \Rightarrow \frac{x}{8} = \frac{6+y}{12}$

$\Rightarrow x = 6 = r \Rightarrow |OE| = y$

$\frac{6}{24} = \frac{6-y}{12} \Rightarrow y = 3 \Rightarrow |OE| = 3$



26.

$p=2$ ise, $p^4+29=45=3^2\cdot 5$. $(2+1)\cdot(1+1)=6\neq 8$, sağlamaz.

$p\neq 2$ ise $2\mid p^4+29$

$p=3$ ise, $p^4+29=110=2\cdot 5\cdot 11$. $(1+1)\cdot(1+1)\cdot(1+1)=8$, sağlar

$p\neq 3$ ise $p^4+29\equiv 1+29\equiv 0 \pmod 3$

$p=5$ ise $p^4+29=654=2\cdot 3\cdot 109$. $(1+1)\cdot(1+1)(1+1)=8$, sağlar

$p\neq 5$ ise $p^4+29\equiv 1+29\equiv 0 \pmod 5$.

O halde $p\neq 2,3,5$ ise $2\cdot 3\cdot 5 \mid (p^4+29)$ ve p^4+29'un pozitif bölen sayısı 8 ise $p^4+29=2\cdot 3\cdot 5$ olmalı.

Fakat bu durumda $p=1$ oluyor. Çelişki

Cevap: p iki değer alabilir: $p=3$ ve $p=5$.

27.

Çözüm. 14 ardışık sayının özel olabileceğini varsayalım: $L, L+1, L+2, \ldots, L+13$. $c\in\{3,4,6,7,8,9\}$ olmak üzere L sayısının son rakamı c olursa, $L+10$'nın da son rakamı c olur. O halde $c\mid L$ ve $c\mid(L+10)$'dan $c\mid 10$ elde edilir $\Rightarrow$ çelişki. Aynı şekilde $L+1$, $L+2$ ve $L+3$ de yukarıdaki kümeden olamaz. Demek ki, L'nin son rakamı $0,1,2,5$ de olamaz, dolayısıyla 14 ardışık sayı özel olamaz.

13 sayının özel olabileceğini göstermek için, yukarıdaki incelemelerde L'nin son rakamının 0 olacağını not edelim. $4\mid(L+4)$ olacağından sondan önceki rakam da 0 olacak $8\mid(L+8) \Rightarrow$ son 3 rakam 0'dır. Şimdi L sayısını

$\frac{10^{18}-1}{9}\cdot 10^3=\underbrace{11\ldots1}_{18}000$ olarak alırsak,

$2,3,4,5,6,7,8,9\mid L$ olduğundan $2\mid L+2$, $3\mid L+3$, ..., $9\mid L+9$ olacak. $2\mid(L+12)$ açıktır.

Cevap: 13

28.

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5

a, f, h ve c köşelerini mavi, geriye kalan köşeleri de kırmızı renge boyayalım. Her ayrıtın bir ucu mavi, diğer ucu da kırmızı olacağından her hamleden sonra $(a+f+h+c)-(e+b+d+g)$ farkı değişmeyecek. Bu hamleler sonucu tüm sayılar 0 olacaksa bu farkın ilk başta da 0 olması gerekir.

$(5+1+3+4)-(2+3+2+9)\neq 0$,

$(3+4+5+2)-(1+1+8+2)\neq 0$

$(3+2+4+5)-(2+3+3+6)=0$

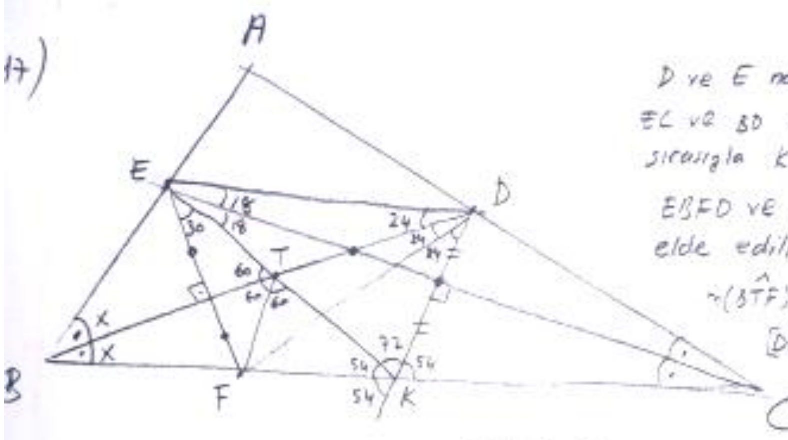
$(2+6+8+3)-(9+5+1+4)=0$

$(1+9+5+2)-(5+4+3+1)\neq 0$

olduğundan 3 durumda tüm sayılar 0 yapılamaz. Farkların 0 olduğu 2 durumda tüm sayıların 0 olabileceği kolayca gösterilebilir.

29.

17)



D ve E noktalarının sırasıyla EC ve BD doğrularına göre simetrikleri sırasıyla K ve F çizilir.

EBFD ve EKCD deltoidleri elde edilir.

$m(B\hat{T}F)=m(F\hat{T}K)=60^\circ$ ve [DF açıortay olduğundan F noktası, $\overset{\triangle}{DTK}$'nın dış merkezidir.

Dolayısıyla [KF dış açıortaydır. $48+x=54$

$x=6 \Rightarrow m(\hat{B})=2x=12^\circ$ elde edilir.

30.

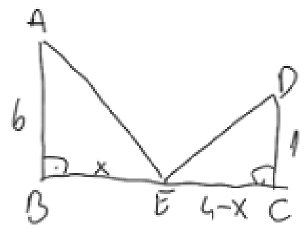
Çözüm $p+q+r+s$ toplam 2'den büyük olduğu için tek sayı olmalı, dolayısıyla bu 4 sayıdan biri 2'dir.

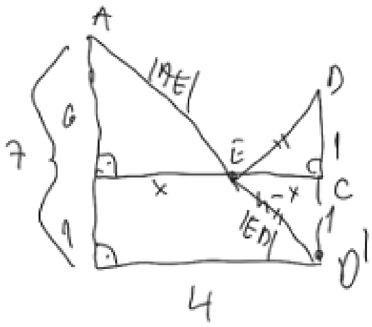
1) $p \neq 2$ ise, geriye kalan 3 sayıdan biri 2, diğerleri tek sayıdır, dolayısıyla $p^2+qs \equiv 1+2 \equiv 3 \pmod 4$ veya $p^2+qr \equiv 3 \pmod 4$ olacağından bunlardan biri tam kare olamaz.

2) $p=2$. $4+qs=a^2$ olsun. O halde $qs=a^2-4=(a-2)(a+2)$. $a-2=1$ olursa, $qs=5$, olamaz, dolayısıyla $q=a-2$, $s=a+2$ veya $q=a+2$, $s=a-2$, yani $|q-s|=4$. Benzer şekilde $|q-r|=4$, dolayısıyla $\{q,r,s\} = \{q-4, q, q+4\}$. Bu 3 sayıdan biri 3'ün katı olacağından $q-4=3$ olmalı. Buradan da, $(p,q,r,s)=\{2,7,3,11\}$ veya $(p,q,r,s)=(2,7,11,3)$.

31.

Kökün içleri tam kareler oluşturularak düzenlenecek olursa $\sqrt{x^2+6^2}+\sqrt{(4-x)^2+1^2}$ elde edilir. Bu durum geometrik bir probleme dönüştürülerek daha rahat anlaşılabilir.





$|AE|=\sqrt{x^2+6^2}$

$|ED|=\sqrt{(4-x)^2+1^2}$

$|AE|+|ED|$'nın en küçük değeri için D'nın C'ye göre simetriği alınıp bu nokta ile A'nın doğrusal olması sağlanır.

$|AE|+|ED| \geq \sqrt{7^2+4^2}$

$|AE|+|ED| \geq \sqrt{65} > 8$

en küçük tam sayı 9'dur.

$\Rightarrow$ (d)

32.

Çözüm Şekildeki gibi satranç tahtası şeklinde boyayarak tek sayıların siyah, çift sayıların da beyaz hanelerde olacağını görürüz. 4 durum olabilir.

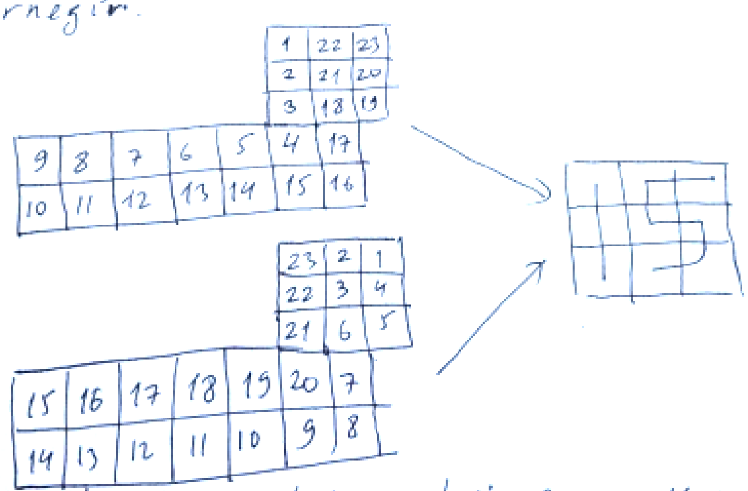
1. durum 1 dikdörtgen, 23 de 3x3 karesindedir. Dikdörtgenden kareye sadece bir "giriş" olabileceğinden 14 sayısı A hanesine, 15 de B hanesine yazılmalı, çünkü 14 C'de, 15 de D'de olursa, 1. sorudan görüldüğü gibi 3x3 karesi doldurulamaz (siyahla başlayıp siyahla bitmeli). 1 sayısı E hanesinde olamaz, dolayısıyla 6 tane siyah haneden birinde olacak ve bu durumların her birinde 2,3,...,13 sayıları tek şekilde yerleştirilebilir. 23 sayısı 3x3 karesindeki 4 siyah hanenin her birinde olabilir ve her bir durum için 16,17,...,22 sayıları 2 değişik yolla yerleştirilebilir (1. sorudaki gibi). Dolayısıyla bu durumda yerleşme sayısı 6·4·2=48'dir

2. durum 1, 3x3 karesinde, 23, dikdörtgende. Bunların sayısı 1. durumla aynıdır (rotalar ters yönde olacak)

3. durum 1 ile 23 aynı anda dikdörtgen üzerinde. Bu durumda kareye B'den girip D'den çıkmamız (veya tam tersine) gerekir, fakat kareyi dolduran rota siyahla başlayıp siyahla bitmeli, dolayısıyla bu durum olamaz.

4. durum. 1 ile 23 aynı anda 3x3 karesinde.

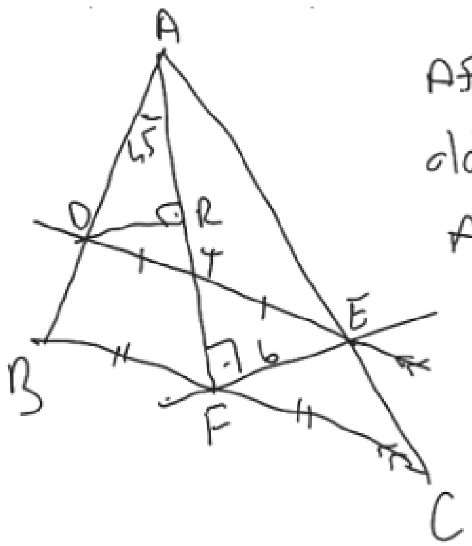
Bu durumdaki tam 2 yerleşim şekline 2 sorusundaki bir yerleşim şekli karşılık getirilebilir (çünkü A'dan C'ye, ve tersine, dikdörtgen üzerinde tek bir rota bulunur): örneğin.



O halde bu durumdaki yerleşim sayısı 16·2=32'dir.
Böylece tüm yerleşimlerin sayısı=48+48+32=128

HAYRETTİN DENEME ÇÖZÜMLERİ

1.



$AF \cap DE = \{T\}$ olsun. $|BF| = |FC|$ olduğundan $|DT| = |TE|$ olur. D'den AF'ye çizilen dikmenin ayağı R olsun. $\overset{\triangle}{RDT} \cong \overset{\triangle}{FET} \Rightarrow$

$|DR| = |FE| = 6 \Rightarrow |AD| = 6\sqrt{2} \Rightarrow (e)$

2.

$$y^2(2x^2+1) = 6x^2+12 \Rightarrow y^2 = \frac{6x^2+12}{2x^2+1} = 3 + \frac{9}{2x^2+1}$$

$$2x^2+1 \mid 9 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow y = \pm 2\sqrt{3} \notin \mathbb{Z}$$

$$x = \pm 1 \Rightarrow y = \pm\sqrt{6} \notin \mathbb{Z}$$

$$x = \pm 2 \Rightarrow y = \pm 2$$

$(-2,-2)$, $(-2,2)$, $(2,-2)$ $(2,2)$ $\Rightarrow$ 4 tane $\Rightarrow$ (d)

3.

A.G.O eşitsizliğini kullanarak dersek

$$x + x^2 + \frac{64}{x^5} = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^2}{2} + \frac{64}{x^5}$$

$$\Rightarrow \frac{x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^2}{2} + \frac{64}{x^5}}{4} \geq \sqrt[4]{x \cdot \frac{x^2}{2} \cdot \frac{x^2}{2} \cdot \frac{64}{x^5}}$$

$$\Rightarrow f(x) \geq 4\sqrt[4]{16} = 8 \Rightarrow (e)$$

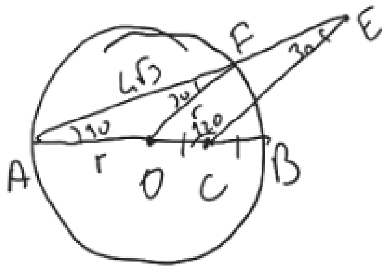
4.

Sol tarafta mümkün olduğu kadar çok 9 bırakmamız gerek. İlk 9'a kadar olan 8 rakamdan sonra 1. ve 2. 9 arasında kalan 19 rakam silinir. Benzer şekilde $4 \cdot 19 + 8 = 84$ rakam silinebilir. Kalan sayılar aşağıdaki gibi olacaktır.

99999~~505152535455565758~~596061 - - - . 2021

Bir sonraki 9'u ve 8'i bırakmak mümkün olmadığından kalan 16 sayı uygun şekilde silindiğinde soldan 11. rakamın 0 olur $\Rightarrow$ (a)

5.



$\overset{\triangle}{CEA}$ ikizkenar üçgen olduğundan $m(\widehat{CAE}) = 30^\circ$ dır. O ile F birleştirildiğinde $\overset{\triangle}{OFA}$ ikizkenar üçgen olur. $|AF| = 4\sqrt{3} \Rightarrow |AO| = r = 4$

$\Rightarrow$ (a)

6.

n tek olmalıdır. $n=1$ için $n^4+4=5$ asaldır.

$n=3$ için $n^4+4=85=5\cdot17$ asal değildir

$n=5$ için $n^4+4=629=17\cdot37$ asal değildir.

$(n,5)=1 \Rightarrow$ Fermat teoreminden $n^4\equiv 1 \pmod 5$

$\Rightarrow n^4+4\equiv 0 \pmod 5 \Rightarrow n^4+4$ asal olamaz

$n=1$ tek çözümdür. $\Rightarrow$ (b)

7.

1.YOL

$f(x) = x^2+10x+25-5 = (x+5)^2-5 \Rightarrow f(f(x)) = [(x+5)^2-5+5]^2-5 =$

$= (x+5)^4-5$. Benzer şekilde $f(f(f(x))) = (x+5)^8-5$ v.s.

$f(f(f(f(f(x))))) = (x+5)^{32}-5$. O halde $(x+5)^{32}-5 = 251$

denkleminden $(x+5)^{32} = 256 = 2^8$, buradan da

$x = -5 \pm \sqrt[32]{2^8} = -5 \pm \sqrt[4]{2}$ elde edilir.

2.YOL

$x^2+10x+20=251 \Rightarrow x^2+10x-231=(x+21)(x-11)=0$

$\Rightarrow x=-21$ veya $x=11$ (Fakat $x=-21$ için çözüm gelmez)

$\Rightarrow x^2+10x+20=11 \Rightarrow x^2+10x+9=(x+9)(x+1)=0$

$\Rightarrow x=-9$ veya $x=-1$ (Fakat $x=-9$ için çözüm gelmez)

$\Rightarrow x^2+10x+20=-1 \Rightarrow x^2+10x+21=(x+7)(x+3)=0$

$\Rightarrow x=-7$ veya $x=-3$ ($x=-7$ için çözüm gelmez)

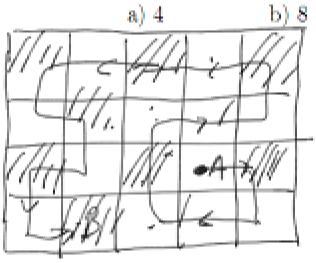
$\Rightarrow x^2+10x+20=-3 \Rightarrow x^2+10x+23=0 \Rightarrow x=-5+\sqrt{2}$

$\Rightarrow x^2+10x+20=-5+\sqrt{2} \Rightarrow (x+5)^2=\sqrt{2} \Rightarrow x=-5\pm\sqrt[4]{2} \Rightarrow (a)$

8.

kaçtır?

a) 4 b) 8 c) 100 d) 200 e) 380



Tahta satranç tahtası şeklinde boyandığında pirenin her adımda ya beyaz haneden siyah haneye ya da siyah hanede beyaza sıçrayacağını görüyoruz. Siyah ve beyaz haneler eşit sayıda olduğundan pirenin rotası, b beyaz, s de siyah haneleri göstermek üzere, ya bsbs..bs, ya da sbsb...sb şeklinde olacak. O halde ya A beyaz, B de siyah hanede bulunacak, ya da A siyah, B de beyaz hanede bulunacak. Her böyle (A,B) ikilisi için bir rota bulunacağı kolayca görülür (şekle bkz.) Dolayısıyla ikili sayısı $10 \cdot 10 + 10 \cdot 10 = 200$ olacak

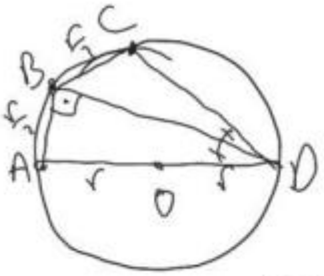
BSBS- -BS 100 10S

SB- - - BSBS $\rightarrow 10 \cdot 10 = 100$

$\rightarrow 10 \cdot 10 = 100$

200

9.



D ile B birleştirildiğinde $m(\widehat{ABD}) = 90°$ dır. Pisagor bağıntısından

$$|BD| = \sqrt{(2r)^2 - \left(\frac{r}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{15}}{2} r$$

$\cos(\widehat{BDA}) = \frac{\sqrt{15}}{4} = \cos(\widehat{CDB}) \Rightarrow \overset{\triangle}{CDB}$ üçgeninde cosinüs teoremi uygulanabilir. $\left(\frac{r}{2}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{15}}{2} r\right)^2 + x^2 - 2\frac{\sqrt{15}}{2} r \cdot x \cdot \cos(\widehat{CDB})$

$\Rightarrow 4x^2 - 15rx + 14r^2 = (4x - 7r)(x - 2r) = 0 \Rightarrow x = \frac{7r}{4}$ veya $x = 2r$

x çaptan küçük olmalıdır. $x = \frac{7r}{4} \Rightarrow \frac{|CD|}{r} = \frac{7}{4} \Rightarrow$ (b)

10.

$x^3 \equiv 0,-1,1 \pmod 7$ bir sayının kübünün alabileceği 3 değer vardır. Denklemi mod 7'de inceleyelim. $z>1$ ise $x^3-y^3 \equiv 4 \pmod 7$ çözümü yoktur. $z=1$ ise $x^3-y^3=19$ ise $(3,2,1)$ tek çözümdür. $\Rightarrow$ (a)

11.

$$S=\frac{xy+y^2+xz+yz}{\sqrt{xyz}}=\frac{y(x+y+z)+xz}{\sqrt{xyz}}=\frac{16y+xz}{\sqrt{xyz}}$$

AGO eşitsizliğini uygulayacak olursak

$$\frac{\dfrac{16y}{\sqrt{xyz}}+\dfrac{xz}{\sqrt{xyz}}}{2} \geq \sqrt{\frac{16y}{\sqrt{xyz}}\cdot\frac{xz}{\sqrt{xyz}}} \Rightarrow \frac{16y+xz}{\sqrt{xyz}} \geq 8$$

$\Rightarrow$ S en az 8 olabilir. Bu da $\dfrac{16y}{\sqrt{xyz}}=\dfrac{xz}{\sqrt{xyz}} \Rightarrow 16y=xz$ durumunda gerçekleşebilir. $\Rightarrow$ (d)

12.

Ünlülerin bir araya gelmemesi için önce ünsüzleri sıralayıp bunların sağına soluna kutucuklar yerleştirip ünlüleri bu kutucuklara dağıtacağız. Bunu yaparken R nin soluna Ü, L nin de sağına E gelmesini engelleyeceğiz. Ünsüzleri sıralarken L nin sağ komşusu R olduğu durumda R nin sağındaki kutuyla L nin solundaki kutu aynı kutu olacağından bu durumu ayrı değerlendireceğiz.

2S, R, F, M, L, 3E, Ü, İ

1) LR durumu: $\dfrac{5!}{2!}=60$

$\_S\_S\_L\_R\_F\_M\_ \rightarrow 60\cdot\binom{6}{1}\cdot\binom{5}{3}\cdot\binom{3}{1}=60\cdot 180$

2) $\cancel{LR}$ durumu: $\dfrac{6!}{2!}-\dfrac{5!}{2!}=300$, $\_S\_S\_R\_F\_M\_L\_ \Rightarrow$

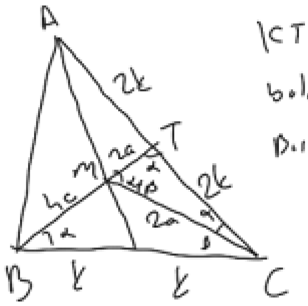
$$300\cdot\Bigg(\underbrace{\binom{5}{1}\cdot\binom{5}{3}\cdot\binom{3}{1}}_{Ü\ \ 3E\ \ İ}+\underbrace{\binom{1}{1}\cdot\binom{6}{3}\cdot\binom{3}{1}}_{Ü\ \ 3E\ \ İ}\Bigg)=300\cdot 210$$

Ü'nün L'nin sağ yanında olmama durumu

Ü'nün L'nin sağ yanında olma durumu

$60\cdot 180+300\cdot 210=300\cdot 36+300\cdot 210=300\cdot 246=73\,800$

13.



$|CT| = |CB|$ olduğundan açıları da göz önünde bulundurulursa $\overset{\triangle}{MCT} \sim \overset{\triangle}{CTB}$ olur.

Buradan $\frac{|CT|}{|TB|} = \frac{|MC|}{|CT|} \Rightarrow \frac{2k}{6a} = \frac{2a}{2k} \Rightarrow k^2 = 3a^2$

$\Rightarrow k = \sqrt{3}a \Rightarrow$ $\overset{\triangle}{MCT}$ ve $\overset{\triangle}{CTB}$ $120^\circ, 30^\circ, 30^\circ$ üçgeni olur. $m(\widehat{ACB}) = 120^\circ \Rightarrow$ (c)

14.

EBOB için Öklit Algoritması uygulandığında

$(p+q, \; p^2-pq+q^2) = (p+q, \; 3pq) = k$ olsun

$$\begin{array}{r} -\;p^2+2pq+q^2 \\ \hline -3pq \end{array}$$

k için potansiyel durumlar $1, 3, p$ ve q 'dur. Bu durumlar incelendiğinde $p=2, q=3 \Rightarrow k=1$ $\;p=5, q=7 \Rightarrow k=3$

2 farklı sonuçtan başka gelemez. $\Rightarrow$ (b)

15.

$x^2 + \frac{4x^2}{(5x+2)^2} - \frac{9}{5} = \left(x - \frac{2x}{5x+2}\right)^2 + \frac{4x^2}{5x+2} - \frac{9}{5} = \left(\frac{5x^2}{5x+2}\right)^2 + \frac{4}{5}\frac{5x^2}{5x+2} - \frac{9}{5} = 0$

$\frac{5x^2}{5x+2} = y \Rightarrow y^2 + \frac{4}{5}y - \frac{9}{5} = 0 \Rightarrow 5y^2 + 4y - 9 = (5y+9)(y-1) = 0$

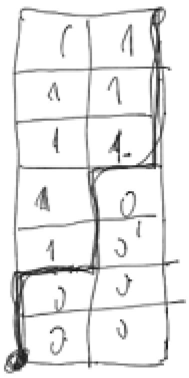
$y = -\frac{9}{5}$ veya $y = 1 \Rightarrow \frac{5x^2}{5x+2} = -\frac{9}{5}$ veya $\frac{5x^2}{5x+2} = 1 \Rightarrow 25x^2 + 45x + 18 = 0$

denkleminin her iki kökü de negatif olduğundan toplamı $-\frac{45}{25} = -\frac{9}{5}$

$\Rightarrow 5x^2 - 5x - 2 = 0$ 'ın tek negatif kökü $\frac{5-\sqrt{65}}{10} \Rightarrow$ toplam $\frac{-13+\sqrt{65}}{10}$

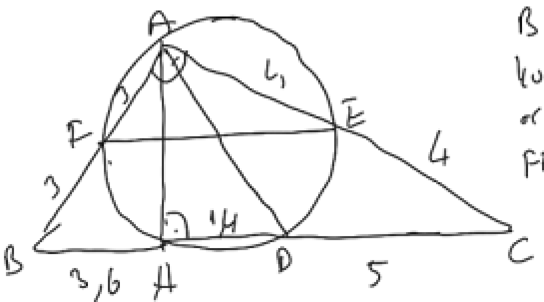
$\Rightarrow$ (c)

16.



1'in yazılmış olduğu her hanenin sağındaki ve üstündeki hanelerde de 1 bulunacağından koşulu sağlayan her yerleşim şeklinde 0'larla 1'leri sol alt köşeden çıkıp her adımda sağa veya yukarı giderek en son sağ üst köşeye ulaşan bir yolla ayırabiliriz. Bu yolların da sayısı $\frac{(2+7)!}{2!\cdot 7!} = 36$'dır.

17.



B ve C'ye göre çemberde kuvvet uygulanırsa E ve F'nin orta noktalar olduğu görülür. FE//BC ve [FE] orta tabandır. FEDH dörtgeni yamuktur.

$$\text{Alan}(FEHD) = \frac{(5+1,4)\cdot 2,4}{2} = 7,68 \Rightarrow (d)$$

18.

2013 = 3·11·61 olduğundan pay kısmındaki ifade 3, 11 ve 61'e bölünmelidir. $n^6+n^4-n^2-1 = n^4(n^2+1)-(n^2+1) = (n^2+1)^2(n-1)(n+1)$

Kare kalan gereği $n^2 \not\equiv -1 \pmod{11}$ ve $n^2 \not\equiv -1 \pmod{3}$

$n \equiv -1, 1 \pmod{11}$ ve $n \equiv -1, 1 \pmod{3}$ ve $n \equiv -1, 1 \pmod{61}$

Çinli Kalan Teoreminden mod(2013)'de $2\cdot 2\cdot 2 = 8$ çözüm.

Ayrıca $n^2+1 \equiv 0 \pmod{61} \Rightarrow n^2 \equiv -1 \equiv 121 \pmod{61} \Rightarrow n \equiv -11, 11 \pmod{61}$

$2\cdot 2\cdot 2 = 8$ çözüm daha. Toplamda 16 çözüm gelir $\Rightarrow$ (e)

19.

$x^2+2x-12=-\sqrt{y}$ veya

$x^2+2x-12+\sqrt{y}=0$

$\Delta=4+4(12-\sqrt{y})=0$

1 kök gelmesi için $\Delta=0$

$y=169$

$1\cdot6\cdot9=54 \Rightarrow (d)$

$x^2+2x-12=\sqrt{y}$ olur.

$x^2+2x-12-\sqrt{y}=$

$\Delta=4+4(12+\sqrt{y})>0$

$\Rightarrow$ 2 kök var.

20.

$A=\{1,2,2^2,\ldots,2^{10}\}\cup\{3,3\cdot2,3\cdot2^2,\ldots,3\cdot2^9\}\cup\{5,5\cdot2,5\cdot2^2,\ldots,5\cdot2^8\}$

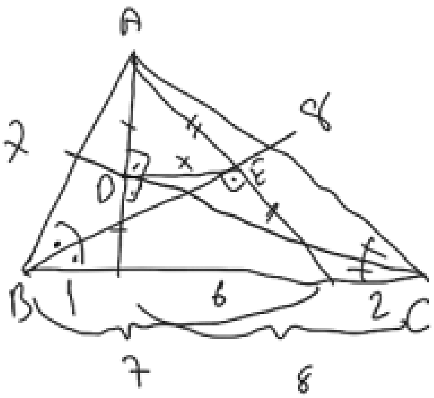
kümesi koşulu sağlar, çünkü 4 eleman alındığında bu 3 kümeden birinden en az 2 eleman alınacak, bunlardan da biri diğerine bölünecek.
$|A|=11+10+9=30$.

Koşulu sağlayan ve en az 31 eleman içeren bir alt kümesi bulunduğunu varsayalım: $a_1<a_2<\ldots$ olmak üzere $A=\{a_1,a_2,\ldots\}$ olsun.
$a_k, a_{k+1}, a_{k+2}, a_{k+3}$ sayılarından biri diğerine bölünebilen ikisi bulunduğundan $a_{k+3}\geq 2a_k$ olacak. O halde

$A=\{a_1, a_2,\ldots, a_{31}\}$ ve $a_1< a_2<a_3 \ldots <a_{31}$ iken $a_1\geq 1$; $a_2\geq 2$; $a_3\geq 3$; $a_4\geq 4$; $a_7\geq 2a_4 = 2^3$; $a_{10}\geq 2a_7\geq 2^4$; . . . $a_{31}\geq 2^{11} = 2048 > 2020$ olur. Bu bir çelişkidir.

Cevap E

21.



D ve F bulundukları kenarların orta noktaları olduğu için [DF] orta taban olur.

$|DF|=\frac{6}{2}=3 \Rightarrow (d)$

22.

$n^2 = 2^6 \cdot 3^4 \cdot 5^8 \Rightarrow n^2$'nin pozitif bölen sayısı $7 \cdot 5 \cdot 9 = 315$ tane olacaktır. Bunları çarpımları n^2 olacak şekilde 2'li gruplarsak

1	2	3	4	$- - -$	n
n^2	$n^2/2$	$n^2/3$	$n^2/4$		$n^2/n = n$

n'den küçük n^2'nin bölen sayısının $\frac{315-1}{2} = 157$ tane olduğu görülür. Bunların içinden $n = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^4$'ün pozitif bölen sayısı $4 \cdot 3 \cdot 5 = 60$ (n'yi çıkarmadık) $60 - 1 = 59$ tanedir. Bu durumda n^2'nin $157 - 59 = 98$ tane böleni n'den küçüktür ve n'yi bölmez. $\Rightarrow$ (b)

23.

$\sqrt[5]{5+2\sqrt{6}} = a$ ve $\sqrt[5]{5-2\sqrt{6}} = b$ ise $a \cdot b = 1$ gelir. $a^5 + b^5 = 10$. Bize $a+b$'yi sormakta. $a+b = x$ olsun

$x^5 = (a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$

$x^5 = 10 + 5ab(a^3+b^3) + 10a^2b^2(a+b) \quad (1)$

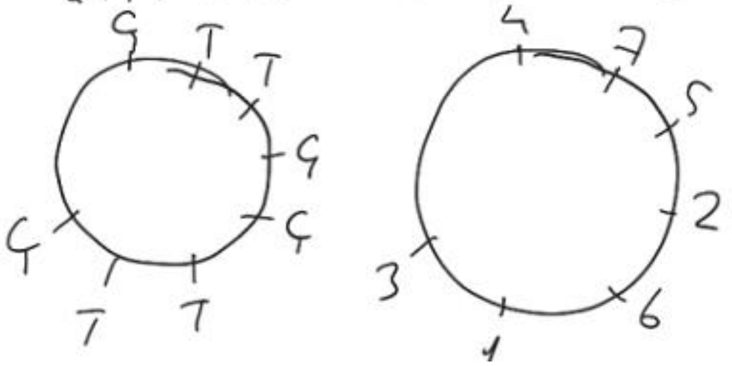
$x^3 = (a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b) \Rightarrow a^3 + b^3 = x^3 - 3x \ (2)$

(1) ve (2) nolu eşitliklerden $x^5 - 5x^3 + 5x - 10 = 0$'a ulaşılır

$\Rightarrow$ (a)

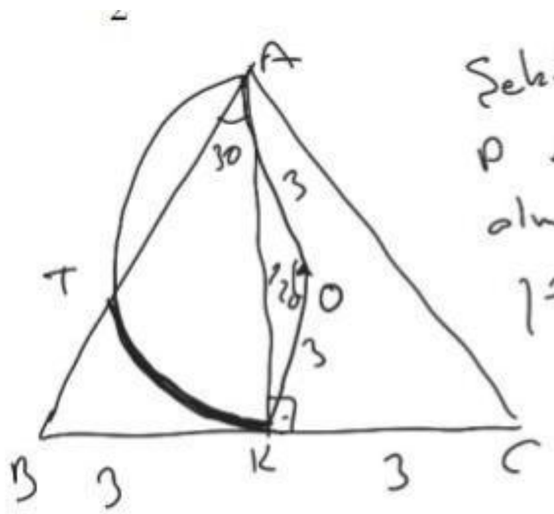
24.

Her tek sayının komşularından biri tek biri de çift olmalıdır. ⇒ Tek sayıların sayısı çift olmalıdır.



$\Rightarrow 7 \Rightarrow$ (c)

25.



Şekilde O merkezli çemberde P noktası TK yayı üzerinde olmalı ve $m(\widehat{AOK}) = 120^\circ$ olmalıdır.

$$|\overset{\frown}{TK}| = 2\pi \cdot 3 \cdot \frac{60}{360} = \pi$$

Aynısından AK'ya göre simetrik tarafta da olacağından

$\pi \cdot 2 = 2\pi \Rightarrow$ (d)

26.

$$A \equiv 2 + (2+2) + (2+2+2) \ldots \underbrace{(2+2+\ldots 2)}_{n \text{ tane}}$$

$$\equiv 2(1+2+\ldots n) \equiv 2 \cdot \frac{n(n+1)}{2} \equiv n \cdot (n+1) \pmod 3$$

$n = 3k \Rightarrow A \equiv 3k(3k+1) \equiv 9k + 3k \equiv 3k \pmod 9$ 0,3,6

$n = 3k+1 \Rightarrow A \equiv (3k+1)(3k+2) \equiv 2 \pmod 9$ 2

$n = 3k-1 \Rightarrow A \equiv (3k-1) \cdot 3k \equiv -3k \pmod 9$ 0,3,6

$\Rightarrow$ 0, 2, 3, 6 olabilir. 5 olamaz. $\Rightarrow$ (d)

27.

$$S = 9x^4 - 6x^3 + 8x^2 - 6x + 16 = x^2(3x-1)^2 + 7x^2 - 6x + 16$$

$$x = \frac{1}{3}(\sqrt{2}+1) \Rightarrow (3x-1)^2 = (\sqrt{2})^2 = 2$$

$$S = 9x^2 - 6x + 1 + 15 = (3x-1)^2 + 15 = 2 + 15 = 17$$

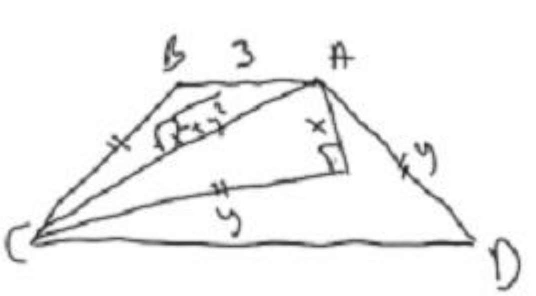
$$\Rightarrow (c)$$

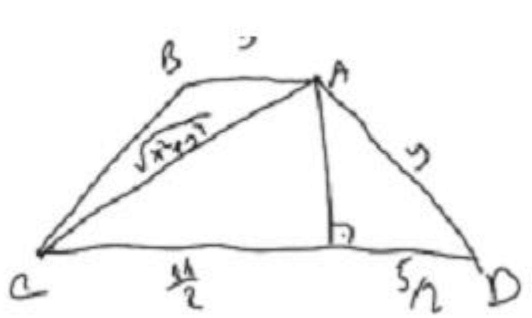
28.

m veya n çift ise ikinci hamle yapan kişi simetri doğrusu çizip rakibinin yaptığı hamlenin bu doğruya göre simetriğindeki kareyi boyayarak kazanmayı garantiler. m ve n tek ise ilk hamle yapan merkezdeki kareyi boyadıktan sonra rakibinin yaptığı hamlenin bu kareye göre simetriğini boyayarak kazanmayı garantiler. Bu durumda sadece 2023x2025 için kazanılır.

$\Rightarrow (a)$

29.





$$x^2 + \cancel{y^2} - \frac{121}{4} = \cancel{y^2} - \frac{25}{4}$$

$$x^2 = \frac{96}{4} = 24 \Rightarrow x = 2\sqrt{6}$$

$$\Rightarrow (e)$$

30.

$x^2(x-4)-3(x-4) \equiv (x-4)(x^2-3) \equiv 0 \pmod{110}$

$110 = 2\cdot5\cdot11$ olduğundan denklemi mod2, mod5 ve mod11'de

inceleyelim. $x \equiv 0,1 \pmod 2$, $x \equiv 4 \pmod 5$ $x^2 \not\equiv 2 \pmod 5$

$x \equiv 4 \pmod{11}$ ve $x^2 \equiv 3 \equiv 25 \pmod{11}$ $x \equiv 5 \pmod{11}$

$x \equiv -5 \equiv 6 \pmod{11}$

ise $x \equiv 4, 5, 6 \pmod{11}$

Çinli Kalan Teoreminden $2\cdot1\cdot3=6$ çözüm vardır. $\Rightarrow$ (d)

31.

Bu toplamın 547 olması düşünüldüğünde x için

oluşan seçeneklerin 46a, 47a, 48a, 49a, 50a, 51a, 52a, 53a

olduğu görülür.

469 ve 523 sağlamaktadır. $4\cdot6\cdot9\cdot5\cdot2\cdot2=6480 \Rightarrow$ (d)

32.

Çözüm: $k=4$ ise torbaların (a,b) durumundan $(a-n, b-n)$, $(4a, b)$ veya $(a, 4b)$ durumu elde edilebilir.

$$b-a \equiv (b-n)-(a-n) \equiv b-4a \equiv 4b-a \pmod 3$$

oluyor, yani $b-a$ farkı $\pmod 3$'te değişmiyor. O halde $(1923, 2023, 4)$ durumunda $2023-1923 \equiv 1 \pmod 3$ olduğundan torbalardaki bilye sayısı sıfırlanamaz.

$(1923, 2001, 4)$ durumunda önce $(1, 78)$, sonra

$$(4,78) \to (1,75) \to \ldots \to (1,4) \to (4,4) \to (0,0)$$

elde edilir. $k=2$ için

$(1453, 2013) \to (1,560) \to (2,560) \to (1,559) \to \ldots \to (1,2) \to (2,2) \to (0,0)$

$k=3$ için

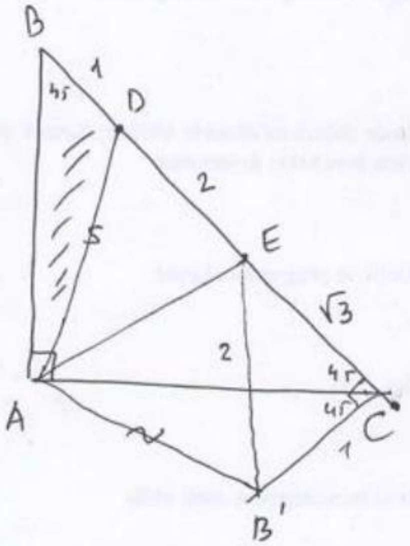
$(1000, 2000) \to (1,1001) \to (3,1001) \to (1,1999) \to \ldots \to (1,3) \to (3,3) \to (0,0)$

ve $(2011, 2013) \to (1,3) \to (3,3) \to (0,0)$

cevap B

TUSİ DENEME ÇÖZÜMLERİ

1.



ABD üçgenini A etrafında ve saat yönünde 90° döndürdüğümüzde B köşesi B' olsun. EB'C üçgeni dik üçgen olup 30-60-90 üçgenidir. DAB'E deltoid ve AE köşegen ise $m(D\hat{A}E) = m(E\hat{A}B') = 45°$ dir.

Cevap B

2.

Çözüm: $A \equiv B \pmod 9$ olduğundan $\underbrace{11\ldots1}_{n} \equiv 0 \pmod 9$. Dolayısıyla $9 \mid n$. Öte yandan $9012345678 - 8901234567 = 111111111$.

Cevap A

3.

Çözüm:

$$y = -1 \Rightarrow f(f(-1)) = \left(f(x) + \frac{1}{2}\right)\left(f(-1) + \frac{1}{2}\right) \qquad (1)$$

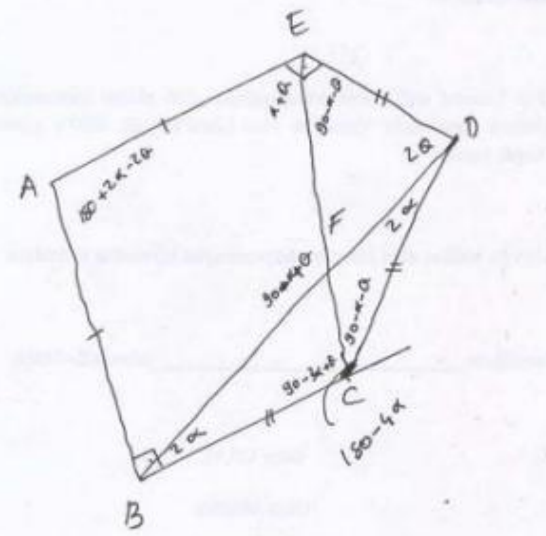
$f(-1) + \frac{1}{2} \neq 0$ olursa, buradan $f(x) = c$ (sabit) olur ki, bu imkansızdır, çünkü $c = \left(c + \frac{1}{2}\right)^2 \Rightarrow c^2 + \frac{1}{4} = 0 \Rightarrow$ Çelişki! Demek ki, $f(-1) = -\frac{1}{2}$. (1)'den $f\left(-\frac{1}{2}\right) = f(f(-1)) = 0$.

Cevap D

4.

Çözüm: Önce sıralı alt kumeleri bulalum. 3^8 (her eleman ya A'ya, ya B'ye, ya da dışarı gidiyor). A'nın boş ise 2^n durum var, B'nin boş olduğu durumların sayısı da 2^n'dir. $A = B = \emptyset$ ise, 1 durum var. O halde sıralı (A, B) ikililerinin sayısı $3^8 - 2 \cdot 2^8 + 1$. Şimdi 2'ye bölme zamanı! ***Cevap:*** 3025.

5.



ABCDE beşgeninde
$m(D\hat{B}C) = m(B\hat{D}C) = 2\alpha$ ve
$m(E\hat{D}B) = 2\theta$ olsun. Buna göre
$m(B\hat{C}D) = 180 - 4\alpha$ olur.
$m(\hat{A}) + m(\hat{E}) + m(\hat{D}) = 360$ olacağından
$m(\hat{A}) = 180 + 2\alpha - 2\theta$ ve
$m(B\hat{F}E) = 90 - \alpha + \theta$ dir.
$|AE| = |AB|$ olduğundan A merkezli
çember B, F, E noktalarından
geçer. O halde $|AF|/|AE| = 1$ dir.

Cevap D

6.

Çözüm: $(2^{3^{74}-1}-1, 2^{3^{92}-1}-1) = 2^{(3^{74}-1, 3^{92}-1)}-1 = 2^{3^{(74,92)}-1}-1 = 255$

Cevap D

7.

Çözüm: AGO kullanırsak

$$a^2 + b^2 = (a-b)^2 + 2ab = (a-b)^2 + \frac{1}{2}ab + \frac{1}{2}ab + \frac{1}{2}ab + \frac{1}{2}ab \geq$$

$$5\sqrt[5]{(a-b)^2 \cdot \frac{1}{2^4} \cdot (ab)^4} \geq 5\sqrt[5]{\frac{1}{2^4}[(a-b) \cdot (ab)^2]^2} = \frac{5}{2}$$

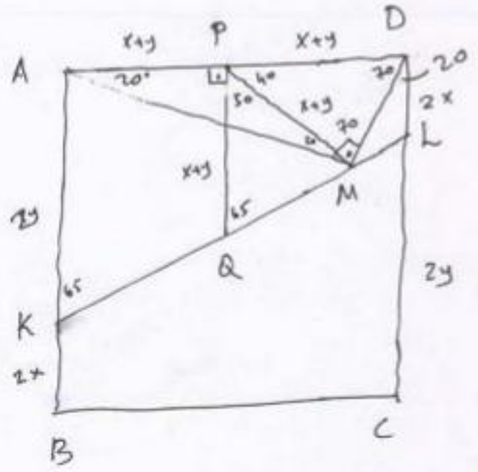
Cevap D

8.

Çözüm: 6 zar atıldığında, $i = 1, 2, \ldots, 6$ için çıkan i'lerin sayısını x_i ile gösterelim. O halde $x_1 + x_2 + \ldots + x_6 = 6$ olacak. Değişik sonuçların sayısı da bu denkelmin çözüm sayısı kadar, yani $\binom{6+6-1}{6-1} = \binom{11}{5} = 462$ olacak.

Cevap C

9.



$m(\widehat{AMD}) = 90°$ dir. $[AD]$ nin orta noktası P olsun. P den AB ye çizilen paralel $[KL]$ yi Q da kessin. Buna göre $m(\widehat{AKL}) = 65°$ dir.

Cevap B

10.

Çözüm: $12 = 12 = 2 \cdot 6 = 3 \cdot 4$ durumlarını inceleyelim (burada her bir çarpanın farklı asallardan geldiğini kabul edeceğiz).
Bir p asalı için $\phi(p^n) = 12$ ise $p^n - p^{n-1} = 12$ denkleminde $n = 1$ için $p = 12$, $n > 1$ için $p = 2, 3$ olur. 12' nin 2 veya 3' ün kuvvetleri farkı olarak yazılamayacağı açıktır. Bu durumda $p = 13$ çözümü gelir. İlk buruma benzer şekilde $\phi(p^n) = 2$ ise $p = 3$ ve $p^2 = 4$ elde edilir. $\phi(p^n) = 6$ için$p = 7$ ve $p^2 = 9$ elde edilir. $k > 2$ için $\phi(k)$ tek sayı olamaz, bu yüzden son durumdan çözüm gelmez. t tek sayısı için $\phi(2t) = \phi(t)$ olduğu göz önüne alınırsa çözümler: $13, 2 \cdot 13, 3 \cdot 7, 2 \cdot 3 \cdot 7, 4 \cdot 7$, $9 \cdot 4$ olup 6 tanedir. ***Cevap:*** C.

11.

Çözüm: $f(x) = [\![2x]\!] + [\![3x]\!] + [\![4x]\!]$ dersek $k \in \mathbb{N}$ için $f(x+k) = f(x) + 9k$ olur. $0 < x \le 1$ aralığında $f(x)$ fonksiyonu x'in aşağıdaki değerlerinde değişime uğruyor: $\frac{1}{4}; \frac{2}{4} = \frac{1}{2}; \frac{3}{4}; \frac{4}{4} = 1; \frac{1}{3}; \frac{2}{3}$. Yani toplam 6 noktada. $f(1) = 9$. O halde ilk 9 sayı içinde 6 tanesi $f(x)$ şekilinde gösterilebilir $\Rightarrow 1, 2, 3, \ldots, 99$ içinde $11 \cdot 6 = 66$ tanesi gösterilebilir.

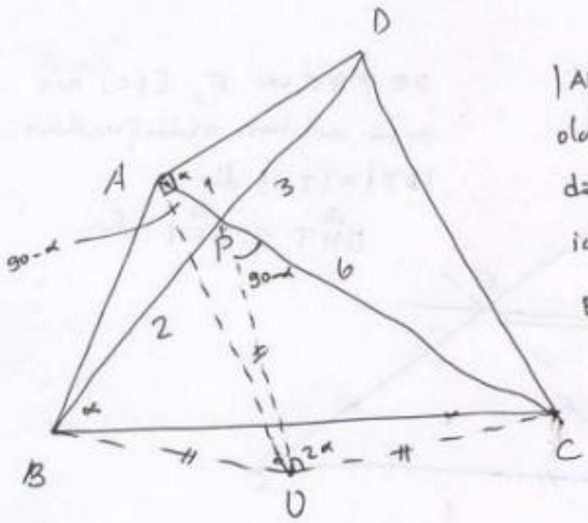
Cevap C

12.

Çözüm: Kazanılan maç sayısı $22+20+32 = 74$ olduğundan toplam 74 gün maç yapılmıştır. Semihin kaybettiği gün sayısı x, oynamadığı gün sayısı y olsun. Buna göre $22 + x + y = 74$ olduğundan $x + y = 52$'dir. Oyuncu kaybettiği günün ertesinde dinleneceğinden $x = y = 26$'dır.* Buna göre Semih 26 maç kaybetmiş olup $22+26 = 48$ maçta oynamıştır.

*Semih turnuvaya dinlenerek başlayıp turnuvayı dinlenerek veya maçı kaybederek başlayıp kaybederek bitirebilir. Bu durumda $x = y - 1$ veya $x = y + 1$ olur. Bu durumlar olması halinde $2y - 1 = 52$ veya $2y + 1 = 52$ olmalıdır. 52 çift olduğundan $2y \pm 1$ formunda olamaz. Öyleyse $x = y$'dir. ***Cevap:*** 48.

13.



$|AP| \cdot |PC| = |BP| \cdot |PD| = 6$ olduğundan ABCD dörtgeni kirişler dörtgenidir. $m(D\hat{A}C) = \alpha \Rightarrow m(D\hat{B}C) = \alpha$ için $m(C\hat{A}O) = 90 - \alpha$ dır.

$\overset{\triangle}{BPC}$ ninin çevrel çemberinin merkezi O için $m(P\hat{O}C) = 2\alpha$ ve $m(O\hat{P}C) = 90 - \alpha$ dır.

o halde O, [PC] üzerindedir.

Buradan yarıçap $r = 3$ bulunur.

14.

Çözüm: $165 = 3 \cdot 5 \cdot 11$ ve $7^{2^{k+1}} = (7^{2^k})^2$' dir.

$$7 \equiv 1 \pmod 3, 7^4 \equiv 1 \pmod 5$$

olduğundan sorudaki toplama A dersek

$$A \equiv 2015 \cdot 1 \equiv 2 \pmod 3, \quad A \equiv 7 + 7^2 + 2013 \cdot 1 \equiv 4 \pmod 5$$

olur. $7^2 \equiv 5 \pmod{11}, 7^4 \equiv 3 \pmod{11}, 7^8 \equiv 9 \pmod{11}, 7^{16} \equiv 4 \pmod{11}, 7^{32} \equiv 5 \pmod{11}$ olduğundan

$$A \equiv 7 + 21 \cdot \frac{2012}{4} + 5 + 3 \equiv 7 \pmod{11}$$

elde edilir. Çin Kalan Teoreminden $A \equiv 29 \pmod{165}$ olduğu görülür.

Cevap B

15.

Çözüm:

$$\left(2n + \frac{1}{4}\right)^2 = 4n^2 + n + \frac{1}{16} \Rightarrow$$

$$0 < \sqrt{4n^2 + n + 4} - \left(2n + \frac{1}{4}\right) = \frac{4 - \frac{1}{16}}{\sqrt{4n^2 + n + 4} + (2n + \frac{1}{4})} < \frac{4}{4n} = 0,01$$

$$\Rightarrow 2n + 0,25 < a_n < 2n + 0,26 \rightarrow$$

virgülden sonraki iki basamak: 25. ***Cevap:*** 7.

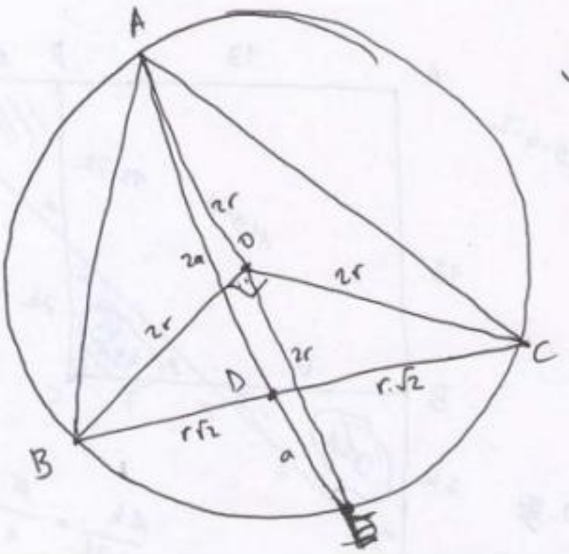
16.

Çözüm: $N = 1$ durumunda başlayan kaybeder, $N = 2$ durumunda baslayan kazanir. $N = 3k+2$ durumunda başlayanın kazanmayı garantileyebileceğini kanıtlayalım. Gerçekten $A = 3k + 2$ durumunda hamle sırası gelen $B = 1$ alarak karşı tarafa $A = 3k + 1$ durumunu bırakıyor, $A = 3k + 1$ durumu da kaybettiriyor, çünkü bu durumda hamle yapan $A = 3m$ veya $A = 3m + 2$ durumuna hamle yapmak zorundadir.

Cevap B

17.

$m(\hat{A}) = 45^\circ$ ise $m(B\hat{O}C) = 90^\circ$ dir!



D noktasına göre kuvvet uygularsak

$a \cdot 2a = 2r^2 \rightarrow a = r$

dir.

AOE üçgeninde kosinüs teoreminden,

$9r^2 = 4r^2 + 4r^2 - 2 \cdot 4r^2 \cdot \cos\alpha$

$\cos\alpha = -\frac{1}{8}$

Cevap A

18.

Çözüm: Denklemi mod 19 da incelersek $x^2 \equiv 2 \pmod{19}$ elde edilir.

Mod19 da 2 nin kare kalan olmadığı kolayca kontrol edilir. Çözüm yoktur.

Cevap E

19.

Çözüm: Verilen koşuldan, $x^3 - 1 = 0 \rightarrow x^3 = 1$ olur. O halde,

$$\left(\frac{1}{x^{100}} + x^{10}\right)^{101} = \left(\frac{1}{x} + x\right)^{101} = \left(\frac{x^2+1}{x}\right)^{101} = \left(\frac{-x}{x}\right)^{101} = -1$$

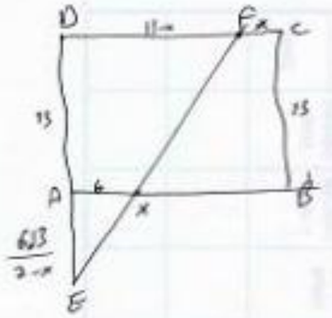
Cevap B

20.

Çözüm: Can her seferinde 10 TL isterse 11 kez 10'ar TL, yani toplamda 110 TL alır. Daha fazla para alma garantisi olmadığını göstermek için şöyle bir strateji izleyelim: Can m TL istediğinde kartta m TL'den az para olduğunu, m TL'den az para içeren kart bulunmadığında geriye kalan kartlar arasında en fazla para içeren kart olduğunu varsayalım. Tek hamlede aldığı en büyük para n TL olsun ve bunu m TL içeren kartı kullanırken almış olsun: $m \geq n$. Bu durumda o ana kadar n TL'den az para içeren kartlar tükenmiştir ve bunların hiçbirinden para çekilmemiştir, çünkü $k < n$ olmak üzere k TL içeren kart için $k < m$ olduğundan, bu kartın yerine m TL içeren (veya daha fazla para içeren) kart kullanılırdı. O halde para alınan kart sayısı en fazla $20-n+1$'dir ve bunların her birinden en fazla n TL alınmıştır. Dolayısıyla elde edilen toplam para en fazla $n(20-n+1)$'dir. $\max[n(21-n)] \leq 10 \cdot 11 = 11 \cdot 10 = 110$.

Cevap C

21.



$$\frac{a}{a+13} = \frac{6}{13-x}$$

$$\frac{a+13}{a} = \frac{13-x}{6}$$

$$\frac{13}{a} = \frac{7-x}{6}$$

$$a = \frac{6 \cdot 13}{7-x}$$

$$\frac{13^2 - 13x}{7-x} = DE$$

$$\frac{(13-x)(13^2-13x)}{7-x} \cdot \frac{1}{2} = 13^2$$

$$\frac{(13-x)^2}{7-x} = 26$$

$$169 - 26x + x^2 = 26 \cdot 7 - 26x$$

$$x^2 = 13$$

$$x = \sqrt{13}$$

Cevap C

22.

Çözüm: n'ye bölünenlerin sayısını $b(n)$ ile gösterirsek, $b(8) \leq b(4) \leq b(2)$ olduğundan $b(8) = 8, b(4) = 4, b(2) = 2$ eşitliklerinden en az ikisi yanlıştır. Benzer şekilde $b(6) \leq b(3)$ olduğundan, $b(6) = 6$ ve $b(3) = 3$ eşitliklerinden en az biri yanlıştır. O halde Ali'nin yaptığı hata sayısı 3'ten az değildir. Sayılar $14, 21, 21, 30, 35, 35, 35, 35$ olarak seçildiğinde hata sayısı tam 3 olacak. ***Cevap:*** 3.

23.

Çözüm: $x^2 + y^2 = 3xy$ olduğundan $S = \dfrac{x^2 + xy + y^2}{(x-y)^2} + \dfrac{(x-y)^2}{(x+y)^2} =$

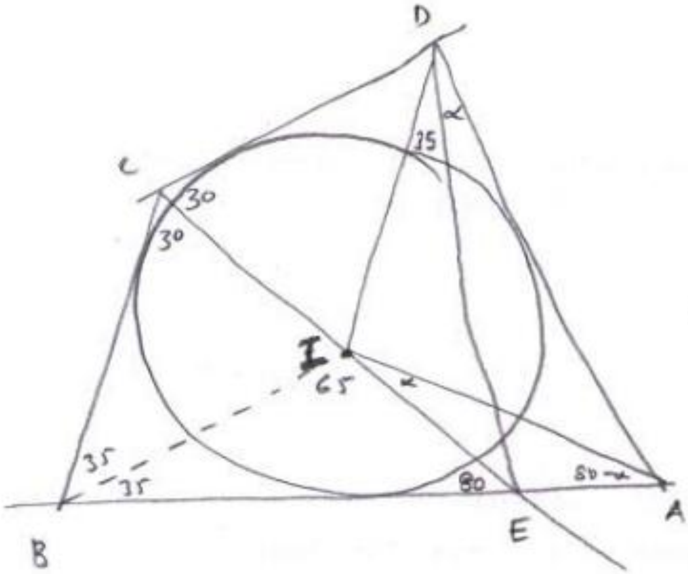
$$\frac{x^2 + xy + y^2}{x^2 - 2xy + y^2} + \frac{x^2 - 2xy + y^2}{x^2 + 2xy + y^2} = \frac{4xy}{xy} + \frac{xy}{5xy} = 4 + \frac{1}{5} = 4,2$$

Cevap B

24.

Çözüm: i. satırdaki j. koltuğu (i, j) ile gösterelim. $n < 64$ ise $n = 64$ varsayabiliriz. Çocuklar iki seansta da sadece $1 \leq i \leq 8$ ve $1 \leq j \leq 8$ koltuklarına otursunlar, öyle ki ilk seansta (i, j) koltuğuna oturan çocuk ikinci seansta (j, i) koltuğuna otursun. Bu durumda iki seansta da aynı sırada oturan iki çocuk bulunmayacak. $n \geq 65$ ise ilk seansta sıraların birinde en az 9 öğrenci oturacak. Bu 9 öğrenciden en az ikisi ikinci seansta aynı sırada oturacak, çünkü sadece 8 sıra var. ***Cevap:*** 65.

25.



$m(A\hat{D}E) = \alpha$ olsun.

Bir dörtgende iki komşu açıortayın belirttiği açı $m(B\hat{I}A) = \frac{\hat{C}+\hat{D}}{2}$ dir. O halde, $m(A\hat{I}E) = \alpha$ dır. DIEA kirişler dörtgeni olup, $35 = 80 - \alpha$ ve $\alpha = 45°$; $m(A\hat{D}C) = 160°$ dir

Cevap E

26.

Çözüm: X sayısının rakamları toplamını $S(X)$ ile gösterelim. $2013 \cdot A$ çarpımı "bakkal çarpması" şeklinde gerçekleştirildiğinde "elde"lerin sayısı e olmak üzere

$$S(2013 \cdot A) = S(A) \cdot 6 - 9e$$

olacak. $S(A) = 5$ olduğundan $S(2013 \cdot A) = 30, 21, 12, 3$ dışında bir şey olamaz. $A = 1004$ alınırsa $S(2013 \cdot A) = 12$ olacak. $S(2013 \cdot A) = 3$ olamayacağı kolayca kontrol edilir.

Cevap C

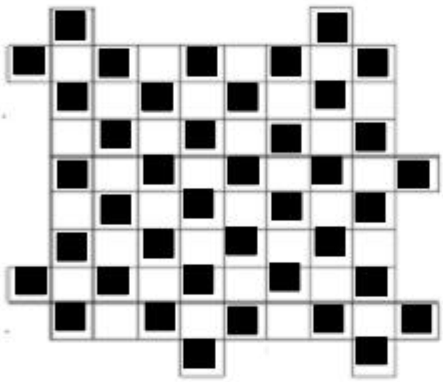
27.

Çözüm: İki tane 1 yan yana gelmiyor, dolayısıyla toplamın her terimi 2 (çarpanlar 1 ve 2 ise) veya 4'tür (çarpanların ikisi de 2 ise). 1'lerin dizideki sıraları $1, 3, 6, 10, \ldots, \dfrac{k(k+1)}{2}, \ldots$ olduğundan 62.nci 1'in sırası $\dfrac{62 \cdot 63}{2} = 1953$ ve 63.ncü 1'in sırası $\dfrac{63 \cdot 64}{2} = 2016$ olacak. Toplamda en son a_{2014}'ü kullanacağımızdan 2'ye eşit olan terimlerin sayısı $2 \cdot 62 - 1 = 123$'dir (a_1 sadece ilk terimde var). O halde toplam $4 \cdot 2013 - 2 \cdot 123 = 7806$ olacaktır.

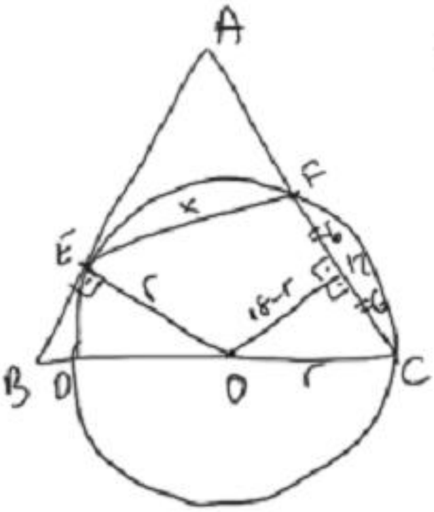
Cevap E

28.

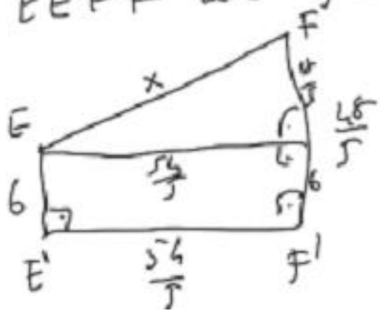
Çözüm: Haneleri satranç tahtası şeklinde beyaz ve siyah renklere boyarsak siyah hanelerin sayısı 8 fazla olacak. T-tetraminoların dışındaki her tetramino iki beyaz ve iki siyah haneyi kaplar. Bir T-tetramino ya üç beyaz, bir siyah; yada üç siyah, bir beyaz haneyi kaplar. O halde en az 4 tane T-tetramino kullanılacak ve bunların herbiri üç siyah, bir beyaz haneyi kaplayacak şekilde yerleştirilecek. Böyle bir yerleştirme şekli deneme yanılmayla kolayca bulunur. ***Cevap:*** 4.



29.



$\overset{\triangle}{ABC}$ ikizkenar üçgen olduğu için D'den AB ve AC'ye inilen dikmelerin toplamı O'dan AB ve AC'ye inilen dikmelerin toplamına eşittir. $|OE| = r$ ise O'dan AC'ye inilen dikme $18-r$ olur. Pisagor bağıntısından $r = 10$ bulunur. Sırasıyla E ve F'den BC'ye inilen dikmelerin ayakları E' ve F' olsun. $\overset{\triangle}{COF} \sim CFF' \sim BEE'$ benzerlikleri kullanılarak $|FF'| = \frac{48}{5}$ ve $|EE'| = 6$ bulunur. Aynı bağıntıdan $|E'F'| = \frac{54}{5}$ gelir. $|EF|$'yi bulmak için $EE'F'F$ dik yamuğundan faydalanılabilir.



$$x^2 = \left(\frac{54}{5}\right)^2 + \left(\frac{18}{5}\right)^2 \Rightarrow x = \frac{36}{\sqrt{10}} \Rightarrow (e)$$

30.

Çözüm: Bu sayıların hepsinin mod 9'da birbirine denk olduğunu gösterelim. a ve b bunlardan ikisi olsun. İki sayı daha alalım: c ve d. Koşuldan dolayı $a + c + d \equiv b + c + d \equiv 0 \pmod{39}$. Dolayısıyla $a - b \equiv 0 \pmod{39}$. O halde $3a \equiv 0 \pmod{39}$ ve dolayısıyla $a \equiv 0 \pmod{13}$ olmalı. Bu durumda n'nin en büyük değerini elde etmek için $\{13, 52, 91, \ldots, 2002\}$ kümesini alırız. Bu durumda $n = 52$ olacak.

Cevap A

31.

Çözüm: $a + \dfrac{1}{a^2} = b + \dfrac{1}{b^2} = c + \dfrac{1}{c^2} = k$ olsun. O halde, bu a, b, c sayıları, $x^3 - k \cdot x^2 + 1 = 0$ denkleminin kökleridir. Vieta teoreminden, $abc = -1$.

Cevap B

32.

Çözüm:

(a) $a1$ ve $b2$ hanelerinden aynı uzaklıkta bulunan iki hane var: $a2$ ve $b1$.

(b) $a1$ ve $d4$ hanelerinden aynı uzaklıkta bulunan 4 hane var : $a4, b3, c2, d1$.

(c) $a1$ ve $h8$ hanelerinden aynı uzaklıkta bulnan tam 8 hane var: esas köşegen üzerindeki haneler.

(d) a1 ve h1 hanelerinden aynı uzaklıkta bulunan tam 20 hane var:

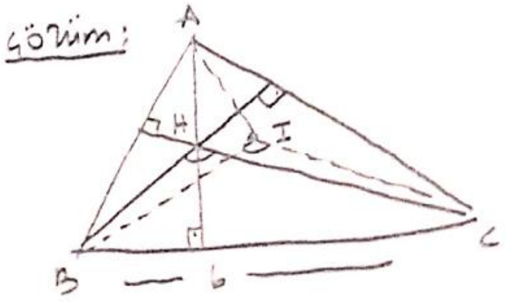
$$d5, e5, c6, d6, e6, f6, b7, c7, d7, e7, f7, g7, a8, b8, \ldots, h8$$

Böylece hepsi olabiliyor. ***Cevap:*** Hiçbiri.

MERVE DENEME ÇÖZÜMLERİ

1.

Çözüm:



$m(B\hat{H}C) = 180 - m(B\hat{A}C)$ ve $m(B\hat{I}C) = 90 + \frac{m(B\hat{A}C)}{2}$ eşitliklerinden $m(B\hat{A}C) = 60°$ bulunur.

ABC üçgeninde $\frac{6}{\sin 60} = 2R$ ve $R = 2\sqrt{3}$ bulunur.

2.

Çözüm:

$d+7=0$ olursa $d^2+1 \mid d+7$ olur. Buradan ilk değerimiz $d=-7$ olarak bulunur. $d+7 \neq 0$ durumunda eğer $d^2+1 \mid d+7$ ise $d^2+1 \leq |d+7| \leq |d|+7$ olmalıdır. $d^2+1 \leq |d|+7$, $d^2-|d|-7 \leq 0$ ve $(|d|-3)(|d|+2) \leq 0$ olur. $|d| \leq 3$ olduğu görülür. $-3 \leq d \leq 3$ aralığındaki değerlerden $d=0$, $d=1$, $d=-1$, $d=-2$ ve $d=-3$ ün istenen bölmeyi sağladığı görülür. $d=-7$ ile beraber istenen değerlerin sayısı 6 olarak bulunmuş olur.

3.

Çözüm:

Verilen denklem $(x^2+4x+1)(2x^2-x+3)=0$ şeklinde çarpanlarına ayrılır. İkinci çarpanın diskriminantı sıfırdan küçük olduğu için gerçel kök gelmez. $x^2+4x+1=0$ denkleminin gerçel kökleri a ve b olsun. $a+b=-4$, $a.b=1$ ve $a^2+b^2=14$ olur. $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)=-4 \cdot 13$
$=-52$ bulunur.

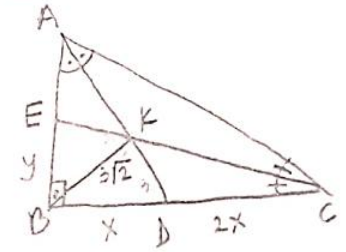
4.

Çözüm:

İkinci zarın sadece çift rakamlardan ve üçüncü zarın sadece tek rakamlardan oluştuğu görülmektedir. Toplamın tek olması için ilk zar çift gelmelidir. 6 rakamdan 2'si çift olduğuna göre, ilk zarın çift olma olasılığı $\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$ olarak bulunur.

5.

Çözüm:



K iç teğet çemberin merkezidir.
$m(A\hat{B}K) = m(K\hat{B}C) = m(D\hat{K}C) = 45°$ ve $\overset{\triangle}{EBK} \sim \overset{\triangle}{KBD}$ (AA benzerliği) olur. $\frac{x}{3\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{y}$, $x\cdot y = 18$ ve $A(E\hat{B}C) = \frac{y \cdot 3x}{2} = 27$ bulunur.

6.

Çözüm:

Rakamları toplamı 3'ün katı olan her sayı 3 ile bölünür. Verilen dizideki n basamaklı bir sayıyı oluşturan rakamların toplamı $(n-2).2+2$ dir. $2n-2 \equiv 0 \pmod 3$ olmalı. Buradan $n \equiv 1 \pmod 3$ ve $k \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $n=3k+1$ olur. 1. terim 3 basamaklı 2009. terim 2011 basamaklı olur.

$3 \le 3k+1 \le 2011$, $\frac{2}{3} \le k \le 670$, 670 tane k tamsayısı ve her bir k için bir tane n sayısı olmak üzere 670 tane n sayısı vardır.

7.

Çözüm:

Paya S ve paydaya T dersek: $S=\sum_{n=1}^{99}\left(\sqrt{10+\sqrt{n}}\right)$ ve $T=\sum_{n=1}^{99}\left(\sqrt{10-\sqrt{n}}\right)$ olur.

$\sqrt{a+b+2\sqrt{ab}}=\sqrt{a}+\sqrt{b}$ özdeşliğinde $1\leq n\leq 99$ aralığındaki her n tamsayısı için $a+b=20$ ve $a\cdot b=n$ olacak şekilde a ve b değerleri seçelim.

$b=\frac{n}{a}$, $a+\frac{n}{a}=20$, $a^2+n=20a$, $a^2-20a+n=0$, $a^2-20a+100-100+n=0$,

$(a-10)^2=100-n$, $a=10+\sqrt{100-n}$ olur. Benzer şekilde $b=10-\sqrt{100-n}$ olur.

Buradan $\sqrt{20+2\sqrt{n}}=\sqrt{10+\sqrt{100-n}}+\sqrt{10-\sqrt{100-n}}$ yazılabilir.

$\sqrt{2}\cdot S=\sum_{n=1}^{99}\sqrt{20+2\sqrt{n}}=\sum_{n=1}^{99}\left(\sqrt{10+\sqrt{100-n}}+\sqrt{10-\sqrt{100-n}}\right)=\sum_{n=1}^{99}\left(\sqrt{10+\sqrt{n}}+\sqrt{10-\sqrt{n}}\right)$

$\sqrt{2}S=T+S$, $(\sqrt{2}-1)S=T$, $\frac{S}{T}=\frac{1}{\sqrt{2}-1}=\sqrt{2}+1$ bulunur.

8.

Çözüm:

$x, \frac{y}{2}, \frac{y}{2}, z$ terimlerine AGO uygularmırsa.

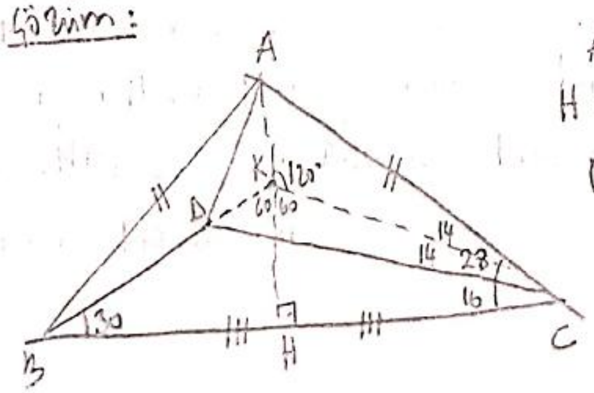
$$\frac{x+\frac{y}{2}+\frac{y}{2}+z}{4}\geq\sqrt[4]{x\cdot\frac{y}{2}\cdot\frac{y}{2}\cdot z}$$

$$\frac{x+y+z}{4}\geq\sqrt{\frac{y}{2}}\cdot\sqrt[4]{x\cdot z}$$

$\frac{1}{4}\geq\frac{y}{2}\sqrt{x\cdot z}$, $\frac{1}{2}\geq y\cdot\sqrt{x\cdot z}$ $\quad y\cdot\sqrt{xz}$'nin en büyük değeri $\frac{1}{2}$ dir.

9.

Çözüm:



A'dan BC'ye inilen dikme ayağı H olsun. $BH = HC$ dir. $BD \cap AH = K$ alınırsa BKC üçgeni ikizkenar üçgen olur. Buradan $m(B\hat{K}H) = m(H\hat{K}C) = 60°$, $m(K\hat{C}D) = m(K\hat{C}A) = 14°$, $m(A\hat{K}C) = 120°$ bulunur.

$\overset{\triangle}{A\hat{K}C} = \overset{\triangle}{D\hat{K}C}$ olduğu için $AC = DC$ olur.

$m(D\hat{A}C) = \frac{180-28}{2} = 76°$ ve $m(B\hat{A}D) = 16°$ bulunur.

Sorunun çözümü trigonometrik seva teoremindende yapılabilir.

10.

Çözüm:

$k \in \mathbb{Z}$ olmak üzere sayılarımız $2k-1, 2k+1, 2k+3$ olsun. $x \in \{1,2,\dots 9\}$ olmak üzere,

$(2k-1)^2+(2k+1)^2+(2k+3)^2 = xxxx$ olur.

$12k^2+12k+11 = 1111x$, $12(k^2+k)+11 = 12.92x+7x$,

$12(k^2+k) = 12.92x+7x-11$ dir. Buradan $12 | 7x-11$ olması gerektiği görülür. x'in zaten tek sayı olduğunu biliyoruz.

$x \in \{1,3,5,7,9\}$ denenirse $x=5$ için $12 | 7x-11$ olur.

$12k^2+12k+11 = 5555$, $12(k^2+k) = 5544$, $k^2+k = 462 = 21.22$ ve $k=21$ bulunur. Ardışık tek sayılarımız 41, 43, 45 bulunur. Toplamları $41+43+45 = 129$ olur.

11.

Çözüm:

$x=y=0$ için $f(0)=0$

$y=-x$ için $f(x^3)+f(-x^3)=0$ ve $f(a)+f(-a)=0$, $f(-a)=-f(a)$ olur.

$y=x$ için $f(y^3)=y\,f(y^2)$ veya $f(x^3)=x\,f(x^2)$ elde edilir.

$$f(x^3)+f(y^3)=x\,f(x^2)+y\,f(y^2)=(x+y)\cdot\left[f(x^2)-f(xy)+f(y^2)\right] \quad (1)$$

$y=-y$ yazılırsa $x\,f(x^2)-y\,f(y^2)=(x-y)\cdot\left[f(x^2)-f(-xy)+f(y^2)\right]$

$=(x-y)\cdot\left[f(x^2)+f(xy)+f(y^2)\right]$ (2) olur.

(1) ve (2) birleştirilirse $2x\,f(x^2)=2x\,f(x^2)-2y\,f(xy)+2x\,f(y^2)$, $y\,f(xy)=x\,f(y^2)$ olur.

Burada $y=1$ alınırsa $f(x)=x\cdot f(1)$ olur. $f(1)=k$ alınırsa $f(x)=kx$ olur.
Verilen $f(3)=9$ kullanılarak $k=3$ bulunur. $f(2013)=3.2013$ olur.

12.

Çözüm:

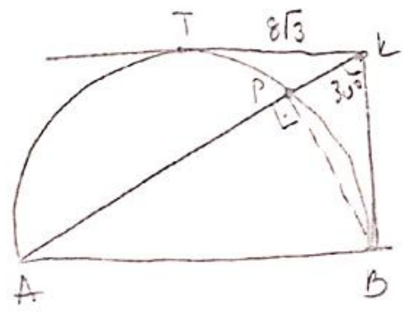
Kutulardaki bilye sayılarına x_1, x_2, x_3, x_4 ve x_5 dersek
$x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=10$ (10 bilye ve 4 ayraç kullanılarak) $\frac{14!}{10!.4!}=1001$ şekilde her hangi bir şart olmaksızın dağılım gerçekleşir. İstenmeyen durumları bulabilmek için 1. kutuya 8 bilye koyalım. Bu durumda geri kalan 2 bilyenin kutulara nasıl dağıldığının bir önemi yoktur. $x_1+x_2+x_3+x_4=2$ durumu $\frac{5!}{3!2!}=10$ şekilde gerçekleşir.

aynı durum diğer kutular içinde geçerli olduğundan istenmeyen durum sayısı $4.10=40$ olur.

İstenen dağılım $1001-40=961$ şekilde olur.

13.

Çözüm:



AK'nın yarım çemberi kestiği nokta P olsun. $m(\widehat{APB}) = 90°$, $\sqrt{3}.PB = PK$ olur.

K noktasından çembere göre kuvvet alınırsa

$(8\sqrt{3})^2 = KP.KA$, $64.3 = \sqrt{3}\,PB.KA$, $PB.KA = 64\sqrt{3}$ olur.

$Alan(\overset{\triangle}{ABK}) = \dfrac{PB.AK}{2} = 32\sqrt{3}$ bulunur.

14.

Çözüm:

$n^4+n^2-2 = (n^2-1)(n^2+2) = (n-1)(n+1).(n^2+2)$

Eğer n çift ise $(n+1).(n-1)$ tek olur ve n^2 sayısı 4 ile tam bölünür. $n^2+2 \equiv 2 \pmod 4$ olur. Bundan dolayı $(n-1)(n+1).(n^2+2)$ çarpımı 8 ile bölünmez dolayısıyla 72 ilede bölünmez.

Eğer n tek ise $n+1$ ve $n-1$ çift olur ve bunlardan birisi 4 ile bölünür. Diğeride 2 ile bölündüğünden $(n+1).(n-1)$ çarpımı yani $(n+1)(n-1)(n^2+2)$ ifadesi 8 ile bölünür. Şimdi 9 ile bölünmeyi incelemeliyiz. $n \equiv 1 \pmod 3$ ise $n-1$ ve $n \equiv -1 \pmod 3$ ise $n+1$ sayıları 3 ile bölünür. Bu durumların herhangi biri için $n^2+2 \equiv 0 \pmod 3$ olduğundan çarpım 9 ile bölünür. Yani n tamsayısı 3 ile bölünüyorsa çarpanların hiçbirisi 3'e dolayısıyla 9 ve 72 ile bölünmez.

n^4+n^2-2 ifadesi $n \equiv \mp 1 \pmod 6$ durumunda 72 ile bölünür. Bu sayılar

$\dfrac{95-11}{6}+1+\dfrac{97-13}{6}+1 = 30$ tanedir.

15.

Çözüm: 5 ile bölünebilen sayıları B kümesi, 7 ile bölünebilen sayıları C kümesi ve 11 ile bölünebilen sayıları D kümesi ile gösterelim.

$s(B) = \left[\!\left[\frac{390}{5} \right]\!\right] = 78$, $s(C) = 55$, $s(D) = 35$ bulunur. 5 ve 7 ile bölünenlerin sayısı $s(B \cap C) = \left[\!\left[\frac{390}{35} \right]\!\right] = 11$, $s(B \cap D) = 7$, $s(C \cap D) = 5$ bulunur. $s(B \cap C \cap D) = 1$ dir.

İstenen sayı: $78 + 55 + 35 - 11 - 7 - 5 + 1 = 164$ Bulunur.

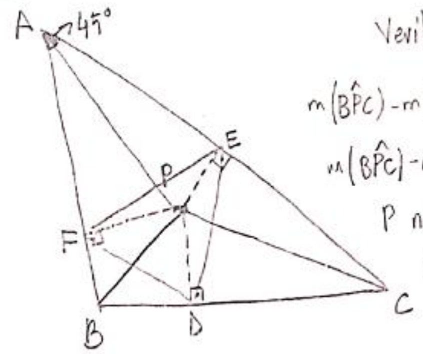
16.

Çözüm:

N için en küçük değer 20'dir. Sandalyeleri sırayla 1'den 60'a kadar numaralandıralım. Oturulan sandalye numaraları 3, 6, 9, ... 60 olmak üzere 20 tanedir. Yeni gelen kişinin her iki kişi arasında oturabileceği 2 boş sandalye vardır. Birine otursa oturan kişinin sağına diğerine oturursa oturan kişinin soluna oturmuş olur. Yani daha sonra oturacak kişiler muhakkak bir kişiye bitişik oturmuş olurlar. Sonuç olarak N en az 20 olabilir.

17.

Çözüm:



Verilen açı eşitliklerini toplarsak

$m(B\hat{P}C)-m(B\hat{A}C)+m(A\hat{P}C)-m(A\hat{B}C)=m(A\hat{P}B)-m(B\hat{C}A)=180°$

$m(B\hat{P}C)-m(B\hat{A}C)=m(A\hat{P}C)-m(A\hat{B}C)=m(A\hat{P}B)-m(B\hat{C}A)=60°$ bulunur.

P noktasından AB, BC ve AC kenarlarına inilen dikmeler sırasıyla F, D ve E olsun.

$m(A\hat{B}P)+m(B\hat{A}C)+m(A\hat{C}P)=m(B\hat{P}C)$

$m(A\hat{B}P)+m(A\hat{C}P)=m(B\hat{P}C)-m(B\hat{A}C)=60°$ olur.

FBDP ve CEPD kirişler dörtgeni olduğundan $m(F\hat{B}P)+m(E\hat{C}P)=m(F\hat{D}E)=60°$ olur.

$m(B\hat{A}P)+m(A\hat{B}C)+m(P\hat{C}B)=m(APC)$, $m(B\hat{A}P)+m(P\hat{C}B)=m(A\hat{P}C)-m(A\hat{B}C)=60°$ dir.

AFPE ve ECDP kirişler dörtgeni olduğundan $m(F\hat{A}P)+m(P\hat{C}D)=m(F\hat{E}P)+m(P\hat{E}D)=60°$ olur.

Bu durumda FED eşkenar üçgen olur. Alanını bulmak için bir kenar uzunluğu yeterlidir.

AFE üçgeninin çevrel çemberinin P noktasından geçtiği ve $m(A\hat{E}P)=m(A\hat{F}P)=90°$ olduğundan $|AP|=12$'nin çemberin çapı görülür.

AFE üçgeninde sinüs teoremi uygulanırsa $\frac{|FE|}{\sin 45°}=12$, $|FE|=6\sqrt{2}$ bulunur.

$A(D\hat{E}F)=(6\sqrt{2})^2\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}=18\sqrt{3}$ olur.

18.

Çözüm:

Denklemi mod3'te incelersek $n\equiv\pm1 \pmod 3$ ve $n=3k+1$ veya $n=3k+2$ olur.

$n=3k+1$ denklemde yerine yazılırsa $2^m=3k^2+2k=k(3k+2)$ elde edilir.

Buradan k ve $(3k+2)$'nin 2'nin kuvveti olduğu görülür. $k=2$ çözümdür, $k=1$ çözüm değildir. $p\geq2$ olmak üzere $k=2^p$ alınırsa $3k+2=3.2^p+2=2(3.2^{p-1}+1)$ ve $3.2^{p-1}+1$ tek olduğu için 2'nin bir kuvveti olamaz. Buradan tek çözüm $(n,m)=(7,4)$ olarak bulunur.

$n=3k+2$ denklemde yerine yazılırsa $2^m=3k^2+4k+1=(3k+1)(k+1)$ elde edilir.

$k+1$ ve $3k+1$ sayıları 2'nin kuvveti olmalıdır. $k=0,1$ çözümdür. $k=0$ için $m=0$ olduğundan çözüm kabul edilmez. $k>1$ için $3k+1=2k+(k+1)>2k+2$ böylece $4k+4>3k+1>2(k+1)$ olur. $k+1=2^p$ ise $4.2^p>3k+1>2.2^p$

$2^{p+2}>3k+1>2^{p+1}$ buradan $3k+1$'in 2'nin kuvveti olamayacağı görülür.

Tek çözüm $k=1$ için $(n,m)=(5,3)$ olur. İstenen $7+4+5+3=19$ olur.

19.

Çözüm:

$a_1=1,\ a_2=3a_1+2,\ a_3=3a_2+2^2, \dots, a_{n-1}=3a_{n-2}+2^{n-2},\ a_n=3a_{n-1}+2^{n-1}$

yazılabilir. Bu eşitlikleri sırayla $3^{n-1}, 3^{n-2}, 3^{n-3} \dots$ ve sondan bir öncekini 3 ile çarparak düzenleyelim.

$3^{n-1}\cdot a_1=3^{n-1},\ 3^{n-2}\cdot a_2=3^{n-1}\cdot a_1+2\cdot 3^{n-2},\ 3^{n-3}\cdot a_3=3^{n-2}\cdot a_2+2^2\cdot 3^{n-3}, \dots$

$\dots 3\cdot a_{n-1}=3^2\cdot a_{n-2}+2^{n-2}\cdot 3,\ a_n=3\cdot a_{n-1}+2^{n-1}$ olur. Düzenlenen eşitlikleri taraf tarafa toplarsak;

$$a_n=3^{n-1}+2\cdot 3^{n-2}+2^2\cdot 3^{n-3}+\dots+2^{n-1}=3^{n-1}+\frac{2}{3}3^{n-1}+\left(\frac{2}{3}\right)^2\cdot 3^{n-1}+\dots+\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\cdot 3^{n-1}$$

$$=3^{n-1}\cdot\frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^n}{1-\frac{2}{3}}=3^n-2^n$$ olur. $a_n=3^n-2^n$ ve $a_{100}=3^{100}-2^{100}$ bulunur.

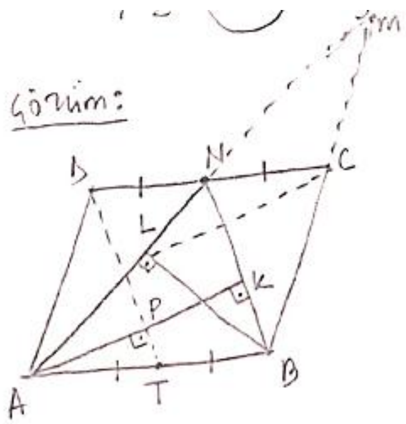
20.

Çözüm:

Sonu sıfırla biten sayılar artan olmaz. Ayrıca artan sayı adediyle azalan sayı adedi eşittir. abcba formundaki sayılar ne artan ne de azalandır. Beş basamaklı son rakamı sıfır olmayan $9\cdot10\cdot10\cdot10\cdot9=81000$ sayı yazılır. $9\cdot10\cdot10\cdot1\cdot1=900$ adet sayı tersten yazılışı kendine eşit olduğundan ne artan nede azalandır. $81000-900=80100$ sayının yarısı artan yarısı azalandır. Artan sayı adedi 40050 olur.

20. P noktası ABC üçgeninin içinde aşağıdaki koşulları sağlayan bir noktadır.

21.



Çözüm:

T, AB'nin orta noktası olsun. DTBN paralelkenar olur. $DT \parallel NB$ ise $AK \cap DT = P$ olmak üzere $m(\widehat{APD}) = 90$ ve $|AP| = |PK|$ olur. Buradan ADK üçgeni ikizkenar olur yani $|AD| = |DK|$ bulunur. Benzer şekilde $|CL| = |CB|$'dir. İkinci çözüm olarak $AN \cap BC = M$ alınırsa $\overset{\triangle}{NMC} \sim \overset{\triangle}{AMB}$ olduğundan $|MC| = |CB|$'dir. $m(\widehat{MLB}) = 90°$, $|MC| = |BC|$'den $|MC| = |BC| = |LC|$ olur, Buradan $\frac{|DK|}{|LC|} = 1$ bulunur.

22.

Çözüm:

Kümeden seçilen elemanı en fazla üç kümeye aynı anda eleman olarak yazabiliriz. Dört kümeye de yazarsak kesişimleri boş küme olmaz. Bir eleman $\binom{4}{1} + \binom{4}{2} + \binom{4}{3} = 14$ şekilde dağıtılabilir. 50 eleman 14^{50} şekilde dağıtılabilir.

23.

Çözüm: $x^4 + x^3 - 1 = 0$, $x^4 + x^3 = 1$ ve $x + 1 = \frac{1}{x^3}$ olur. a denklemin kökü olduğundan $a + 1 = \frac{1}{a^3}$ yazılabilir. Aynı şey diğer kökler için de yazılırsa $(a+1) + (b+1) + (c+1) + (d+1) = a + b + c + d + 4 = -1 + 4 = 3$ bulunur.

24.

Çözüm:

Verilen ifadeyi düzenleyelim

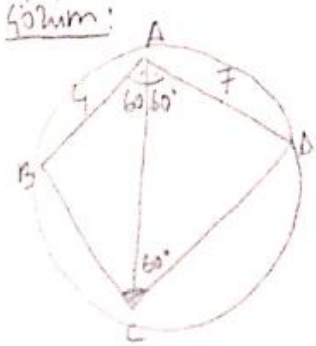
$7 \cdot 7^{2019} - 7^{2019} + 7 \cdot 7^{2017} - 7^{2017} + \ldots + 7 \cdot 7 - 7 + 1$

$6 \cdot 7^{2019} + 6 \cdot 7^{2017} + \ldots + 6 \cdot 7^1 + 1 = (6060\ldots061)_7$ elde edilir.

$(6060\ldots061)_7$ sayısı 2020 basamaklıdır. Rakamları toplamı $6 \cdot 1010 + 1 = 6061$ bulunur.

25.

Çözüm:



$m(\widehat{BAD})+m(\widehat{BCD})=180^\circ$ olduğundan ABCD kirişler dörtgenidir. $|BC|=|CD|$ ve BCD eşkenar üçgen olur. Batlamyus teoreminden $4\cdot|CD|+7\cdot|BC|=|AC|\cdot|BD|$, $|AC|=11$ bulunur. BAC üçgeninde kosinüs teoreminden

$$|BC|^2=4^2+11^2-2\cdot 4\cdot 11\cdot \cos 60^\circ$$

$|BC|=\sqrt{94}$ bulunur

26.

Çözüm:

$k\in\mathbb{Z}$ olmak üzere $5^p+4\cdot p^4=k^2$ olsun. $5^p=k^2-4p^4=(k-2p^2)(k+2p^2)$ olur.

Birincisi: $(k-2p^2)$ ve $(k+2p^2)$ sayıları 5'in kuvveti olduğu anlamına gelir. $5|k-2p^2$ ve $5|k+2p^2$ olmalıdır $[a|b$ ve $a|c$ ise $a|b-c]$ Buradan $5|4p^2$ ve $p=5$ bulunur. $p=5$ için $k=75$ olur.

İkincisi: $k-2p^2=1$ ve $k+2p^2=5^p$ olur. $k=1+2p^2$ yerine yazılırsa $5^p=4p^2+1$ olur. $p\geq 5$ için $5^p>p^5\geq 5p^4>4p^4+1$ göz önüne alınırsa $5^p=4p^2+1$ eşitliğinin sağlanmadığı görülür. $p=2$ ve $p=3$ için de eşitlik sağlanmaz.

Buradan tek çözümün $p=5$ olduğu görülür.

27.

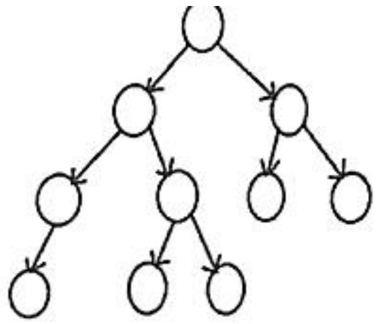
a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) 4 farklı

[$(x \pm y)^n$ açılımları farkı]

Çözüm:

$S_n = x^n + y^n + z^n$ olsun. $n=1$ için $S_n = S_1 = x+y+z = 0$ sabit olur.
$n=3$ için $S_n = S_3 = (x+y+z)\cdot(x^2+y^2+z^2-xy-xz-yz)+3xyz = 3$ sabit olur.
$n \neq 1$ ve $n \neq 3$ olsun. $x+y+z=0$ ve $x.y.z=1$ eşitlikleri için 2 farklı sonuç bulunabilir. Bunlar $(x,y,z) = \left(\frac{-1}{\sqrt[3]{2}}, \frac{-1}{\sqrt[3]{2}}, \sqrt[3]{4}\right)$ (1) ve $(x,y,z) = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}, \frac{1-\sqrt{5}}{2}, -1\right)$ (2) olur. (1) ve (2)'deki gibi soruda verilen denklemleri sağlayan farklı (x,y,z) üçlüleri bulunabilir. S_n değerlerinin (2) için tamsayı olduğu görülür. S_n değeri (1) için $2\cdot\left(\frac{-1}{\sqrt[3]{2}}\right)^n + \left(\sqrt[3]{4}\right)^n = \frac{2^n+(-1)^n\cdot 2}{\left(\sqrt[3]{2}\right)^n}$'e eşittir. Bu değerde $n=1$ veya $n=3$ için tamsayıya eşit olup diğer n değerleri için tamsayıya eşit olmaz. Buradan istenilen n değerlerinin iki tane olduğu görülür.

28.



şeklin yanında olsun.

2 eleman tablosuna tek türlü
3 eleman tablosuna 2 türlü yerleştirilir
Toplam $84.1.10.2 = 3360$ yol vardır.

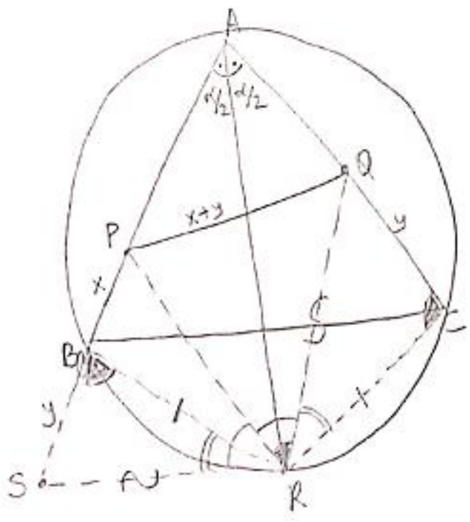
a)2940 b)3026 c)3150 d)3360 e)3696

Çözüm:

En üstteki haneye yazılacak sayı en büyük sayı olacağından 10 olur. Kalan dokuz sayıyı biri 3 elemanlı diğeri 6 elemanlı ayrık iki kümeye $\binom{9}{3} = 84$ yolla ayrılabilir. Üç eleman tablosuna iki türlü yerleştirilebilir.

(Büyük sayı üstteki haneye diğer iki sayı alttaki hanelere iki türlü). Kalan 6 elemandan en büyük olan 6'lı grubun en üst hanesine yazılır. Geri kalan elemanları biri 2 elemanlı diğeri 3 elemanlı iki kümeye $\binom{5}{2} = 10$ şekilde ayırabiliriz.

29.



$|BP| = x$, $|QC| = y$ ve $|PQ| = x+y$ olsun

$m(\widehat{BAR}) = m(\widehat{RAC})$ olduğundan $|BR| = |RC|$ olur.

Çemberin dışında A, B, S noktaları doğrusal ve $|BS| = |QC|$ olacak şekilde S noktası seçilsin.

$m(\widehat{ACR}) + m(\widehat{ABR}) = 180$ ise $m(\widehat{ACR}) = m(\widehat{SBR})$ olur

(1) $\overset{\triangle}{SBR} \cong \overset{\triangle}{QCR}$ (KAK eşliği) $|SR| = |RQ|$ dur.

$\overset{\triangle}{PSR} = \overset{\triangle}{PQR}$ (KKK eşliği) $m(\widehat{PRS}) = m(\widehat{PRQ})$

$m(\widehat{BRS}) = m(\widehat{CRQ})$ (1)'den $m(\widehat{BRP}) + m(\widehat{QRC}) = m(\widehat{PRQ})$

$m(\widehat{BAC}) + m(\widehat{BRC}) = 180^\circ$ (kirişler dörtgeni)

$m(\widehat{BRC}) = 180 - \alpha$ ve $m(\widehat{PRQ}) = \frac{180 - \alpha}{2} = 90 - \frac{\alpha}{2}$ olur.

30.

Çözüm: Eşitliği düzenlersek $q^2 - q = 145p^2 - p$, $q(q-1) = p(145p-1)$ olur.

Buradan $p = q$'nun çözüm olmadığı görülür. Bu durumda $p \mid q-1$ ve $q \mid 145p-1$ olmalıdır. $\frac{q-1}{p} = \frac{145p-1}{q} = k$ alınırsa $q = pk+1$, $145p-1 = qk$ ve q yerine yazılırsa $145p - 1 = k \cdot (kp+1) = k^2p + k$ ve $p = \frac{k+1}{145-k^2}$ olur. $k^2 < 145$, $k \leq 12$ bulunur. $k = 12$ için $p = 13$ ve $q = 157$ bulunur. $k \leq 11$ için $145 - k^2 \geq 145 - 11^2 = 24 > k+1$ olduğundan $p < 1$ olur. Buradan uygun $(p,q) = (13, 157)$ olduğu görülür.

Sonuç $13 + 157 = 170$ bulunur.

31.

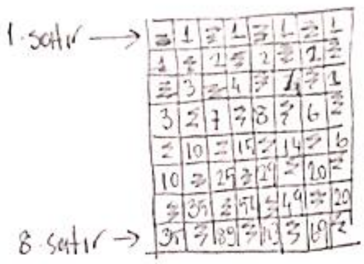
Çözüm:

İlk yazdığımız sayı kaç olursa olsun bu sayıdan küçük sayıların büyükten küçüğe ve ilk yazılan sayıdan büyük olanların küçükten büyüğe sıralanması gerektiği görülür. İlk yazılan sayı 6 ise $\{5,4,3,2,1\}$ sayıları bir grup $\{7,8,9\}$ sayıları bir grup olur. Bu gruplardan birini yerleştirmek için yer seçimi $\binom{9}{3}$ şeklinde yapılır ve tek türlü dizilirler. Aynı durum diğer sayılar içinde yapılırsa

tüm durumlar $\binom{9}{0}+\binom{9}{1}+\cdots+\binom{9}{9}=2^9$ bulunur.

32.

Çözüm



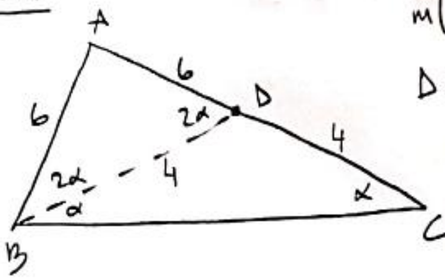
Soruyu şu şekilde yeniden yorumlayalım. Birinci satırdaki beyaz satırlardan yola çıkan birisi sadece komşu beyaz satırları kullanarak, her seferinde bir alt satırdaki beyaz kareye zıplayarak kaç farklı şekilde 8. satırdaki beyaz kareye ulaşır. 1. satırdan 8. satıra ulaşırken kullandığı her bir yol bizim için farklı bir seçimdir.

Toplam $35+89+103+69=296$ seçim yapılabilir.

CANSU DENEME ÇÖZÜMLER

1.

Çözüm:



$m(\hat{C}) = \alpha$ ve $m(\hat{B}) = 3\alpha$ olsun.
$D \in [AC]$ olmak üzere, $m(\hat{C}) = m(C\hat{B}D)$ çizersek
$|AB| = |AD| = 6$ ve $|BD| = |DC| = 4$ olur
ABC üçgeninde BD kesenine göre, stewart teoremi kullanılırsa

$$4^2 = \frac{6^2.4 + |BC|^2.6}{6+4} - 6.4$$

$|BC| = \frac{16}{\sqrt{6}}$ bulunur.

2.

Çözüm: Aşagıdaki tablo $2^n + 1$ ve $3^n + 2$ sayılarının (mod 5) teki değerlerini göstermektedir.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	⋯
$2^n + 1$	3	5	9	17	33	65	129	257	⋯
(mod 5)	3	0	4	2	3	0	4	2	⋯
$3^n + 2$	5	11	29	83	245	731	2189	6563	⋯
(mod 5)	0	1	4	3	0	1	4	3	⋯

2^n+1 ve 3^n+2 sayılarının $n = \{1,2,3,\dots\}$ için mod 5'teki değerlerine bakarsak periyotlarının aynı olduğunu görürüz. Her iki çarpanında mod 5'teki periyotları 4 tür. $n \equiv 2 \pmod 4$ için $5 \mid 2^n+1$ ve $n \equiv 1 \pmod 4$ için $5 \mid 3^n+1$ dir. 5'in herhangi bir n değeri için çarpanların ikisinide aynı anda bölmesi mümkün değildir. Bu durumda 5^n sayısı $(2^n+1)(3^n+2)$'nin çarpanlarından birini bölebilir. Fakat $n \geq 2$ durumunda bu çarpanlardan hiç birini bölemez. $n = 1$ için $5 \mid (2^1+1)(3^1+2) = 15$ olur. $n=1$ işlemin tek çözümüdür.

3.

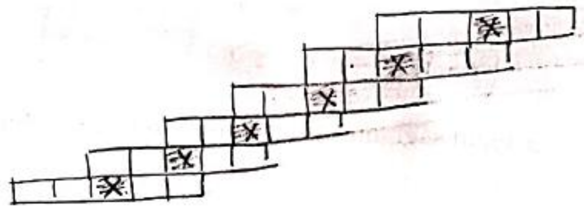
Çözüm:

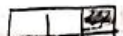
$x \neq 0$ olmadığı görülüyor. $x = \frac{-1}{x+1}$, $x^2+x=-1$, $x^2+x+1=0$ ve eşitliğin her iki tarafı $(x-1)$ ile çarpılırsa $x^3-1=0$, $x^3=1$ bulunur.

$$(x^3)^{33} + \frac{1}{(x^3)^{33}} = 1+1=2$$

4.

Çözüm:



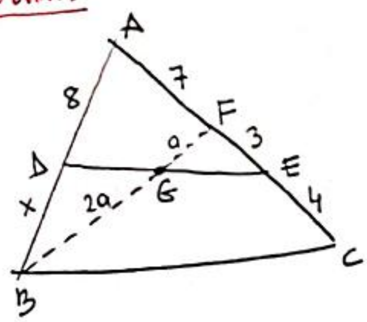
Deniz boyalı kapılardan geçmek zorundadır.  Bir boyalı kapıdan diğerine gidebileceği (↱→ ‿↑ ‿↱→) 3 farklı yol vardır.

İlk boyalı kapıdan sonra 5 tane boyalı kapı olduğu için

$3^5=243$ olur.

5.

Çözüm:



B köşesinden çizilen kenarortay AC'yi F'de kessin. $|FE|=3$ ve $|AF|=7$ olur. $\frac{|GF|}{|BG|}=\frac{1}{2}$ olduğunu biliyoruz.

Menaleus teoremi kullanılırsa $\frac{3}{10}\cdot\frac{8}{x}\cdot\frac{2a}{a}=1$

$x=\frac{24}{5}=4,8$ bulunur.

6.

Çözüm:

Dizinin birinci elemanının bir tam kare ikinci elemanınınsa tam kare olmadığı görülebilir. ~~ikinci~~ Dizinin diğer elemanları $m \in \mathbb{Z}$ olmak üzere m^2'ye eşitse m çift yani $m = 2k$ olmalıdır.

$m^2 = 4k^2 = 164\ldots4$, $k^2 = 411\ldots1$ ve bu eşitlik (mod 4) te incelenirse $k^2 \equiv 3 \pmod 4$ olur. (mod 4)'te bir tam kare 3'e eşit olamaz bu bir çelişkidir. Bu dizide tam kare olan eleman bir tanedir.

7.

Çözüm:

İlk gün 210 sayfa okumuştur. İkinci gün n sayfa okumuş olsun. Bu sayfaların üzerinde yazan sayfa numaralarının toplamı;

$211 + 212 + \cdots + (210+n) = (210+1) + (210+2) + \cdots + (210+n) = 210.n + \dfrac{n.(n+1)}{2}$

$210.n + \dfrac{n.(n+1)}{2} = 4410$ olmalı. $210.n < 4410$ ve $n < 21$ elde edilir.

$n = 20$ için $210.n + \dfrac{n.(n+1)}{2} = 4410$ denklemi sağlanır. (Bu değer ikinci derece denklem çözülerekte bulunabilir). Arda 2. gün 20 sayfa kitap okumuştur.

okuması gereken $630 - (210+20) = 400$ sayfası kalmış.

8.

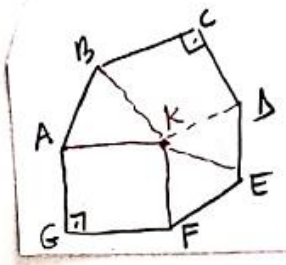
a) 38 b) 54 c) 62 d) 100 e) 125

Mehmet 1'den 100'e kadar olan sayıları toplamları 125 olacak şekilde iki elemanlı kümelere ayırır.

$\{25,100\}, \{26,99\}, \ldots \{62,63\}$ Bu 38 kümedeki elemanlardan birini aldığında diğerini almaması gerekir. Bu durumda $100 - 38 = 62$ sayı alınabilir.

9.

İç açıları toplamı $(n-2) \cdot 180 = 900$ bulunur. $m(\hat{A}) = m(\hat{B}) = m(\hat{D}) = m(\hat{F}) = 150°$ olur.



Yediigenin içinde alınan bir K noktası yardımıyla AKFG karesini oluşturalım. ABK, KFE ve KDE üçgenleri eşkenar üçgen ve BCDK kare olur.

$\text{Toplam Alan} = 2 \cdot A(AKFG) + 3 \cdot A(ABK) = 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot \frac{2^2\sqrt{3}}{4} = 8 + 3\sqrt{3}$

10.

$6 \mid a+b+c$ olması için sayıların üçü de çift veya biri çift ikisi tek olmalıdır. $36 \mid a^2+b^2+c^2$ ise $4 \mid a^2+b^2+c^2$ dir. $a^2+b^2+c^2 \equiv 0 \pmod 4$ olmalı. Sayılardan ikisi tek alınırsa (mod4)'te 1 ve biri çift alınırsa (mod4)'te 0 olur. $0+1+1 \not\equiv 0 \pmod 4$ olduğundan sayıların ikisinin tek birinin çift olması mümkün değildir.

Bu durumda sayıların üçü de çift olmalıdır. Bu durumda a^3, b^3 ve c^3 sayılarının her biri 8 ile bölünebildiğine göre, $a^3+b^3+c^3$ sayısı da 8 ile bölünebilir.

11.

$x_2 = \frac{2}{4} \cdot \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{2}\right) = \frac{2}{6}$, $x_3 = \frac{3}{5}\left(\frac{2}{6} + \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{6}$ ve her $n \geq 1$ için $x_n = \frac{n}{6}$ alırsak

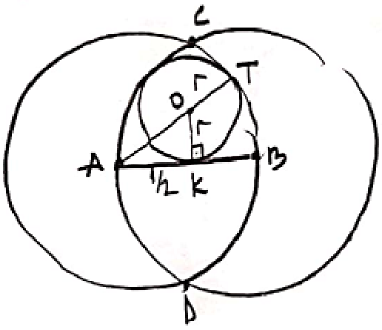
$x_{n+1} = \frac{n+1}{n+3} \cdot \left(\frac{n}{6} + \frac{1}{2}\right) = \frac{n+1}{6}$ bulunur. Buradan $x_{2021} = \frac{2021}{6}$ bulunur.

12.

Çözüm 3. sıradakileri s(A) 5. sıradakileri s(B) ve 7. sıradakileri s(C) ile gösterirsek, siyah olmayan bilye sayısını $s(A)+s(B)+s(C)-s(A\cap B)-s(A\cap C)-s(B\cap C)+s(A\cap B\cap C)$ formülüyle bulabiliriz. $670+402+287-134-95-57+19=1092$ mermer siyahtan farklı renktedir. $2012-1092=920$ siyah m. vardır.

13.

Çözüm:



T ve K teğet noktaları O çemberin merkezi olmak üzere

$|AT|=1$, $|AK|=|KB|=\frac{1}{2}$, $|OT|=|OK|=r$ ve $|AO|=1-r$ olur.

AKO üçgeninde pisagor teoremi yazılırsa.

$$(1-r)^2=r^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$r=\frac{3}{8}$ bulunur.

14.

Çözüm! $n^6+n^4-n^2-1=n^4(n^2+1)-(n^2+1)=(n^2+1)(n^4-1)=(n^2-1).(n^2+1)^2$ olur. n tek olursa verilen ifade çift olduğundan 2012 ile bölünmez. Buradan n'nin tek olduğu görülür. Her n tek sayısı için n^2+1 çift ve $(n^2+1)^2$; 4 ile bölünür. n^2+1'in 503 ile bölünemeyeceği küçük Fermat Teoreminden görülebilir. O halde $503|n^2-1$ olmalıdır. $n^2-1\equiv 0 \pmod{503}$, $n^2\equiv 1 \pmod{503}$ ve $n\equiv \pm 1 \pmod{503}$. Bu durumda n tek ve $n\equiv \pm 1 \pmod{503}$ olursa verilen ifade 2012 ile bölünebilir. $k\in\mathbb{Z}$ için $n=503k\pm 1$ sayıları çift olduğundan, çözüm olamaz. $k\in\mathbb{Z}$ için $n=1006k\pm 1$ çözümümüzdür.

$k=1$ için $n=1005$ ve $n=1007$ olur. Toplam 2012 bulunur.

15.

Çözüm:

$[\![x]\!] \leq x$ olduğundan

$4x^2 - 20[\![x]\!] + 9 \geq 4x^2 - 20x + 9 = (2x-9)(2x-1)$ ve $(2x-9).(2x-1) \leq 0$ olur.

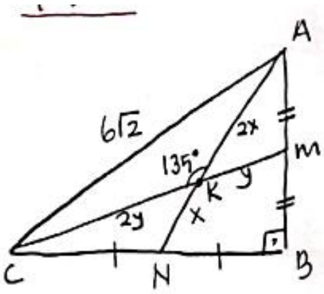
Buradan $1 \leq 2x \leq 9$ ve $0 \leq [\![x]\!] \leq 4$ elde edilir. $[\![x]\!] = \{0,1,2,3,4\}$ değerleri denklemde yerine yazılırsa $[\![x]\!]=0$ için çözüm olmadığı görülür. Diğer $[\![x]\!]$ değerleri için; $x=\frac{\sqrt{11}}{2}$, $x=\frac{\sqrt{31}}{2}$, $x=\frac{\sqrt{51}}{2}$ ve $x=\frac{\sqrt{71}}{2}$ bulunur. Köklerin kareleri toplamı 41 olur.

16.

Çözüm:

Aradığımız tarihin yılı 2 veya daha büyük bir sayı ile başlamalıdır. Yılı 2 ile başlatırsak ay hanesinde 11 ve 12'yi kullanamayacağımız için ay hanesi 0 ile başlar. Bu durumda gün hanesi 1 veya 3'ten biriyle başlar. Eğer gün hanesi 3 ile başlarsa birler basamağı için 1'den başka seçeneğimiz olmaz. Fakat 1 ile başlatırsak 3 rakamını yıl hanesi için kullanabiliriz. İlk kez dendiği için önce yılı sonra ayı sonrada gün hanesini mümkün olduğunca küçük almaya çalışırız. Böylece istenen tarih 17/06/2345 olarak bulunmuş olur. 6. ay Haziran ayıdır.

17.



AN ve CM kenarortaylar olduğundan K noktası ABC üçgeninin ağırlık merkezidir.

$2.|NK| = |AK| = 2x$ ve $2|KM| = |CK| = 2y$ olsun

AKC üçgeninde cosinüs teoremi uygulanırsa

$$(6\sqrt{2})^2 = 4x^2 + 4y^2 - 2.2x.2y.\cos 135$$

$$18 = x^2 + y^2 + xy\sqrt{2}$$

$\overset{\triangle}{ABN}$, $\overset{\triangle}{MBC}$ ve $\overset{\triangle}{ABC}$'ninde pisagor teoremi uygulanırsa

$x^2 + y^2 = 10$ olur.

$18 = 10 + xy\sqrt{2}$, $xy = 4\sqrt{2}$

Alan$(\overset{\triangle}{AKM}) = \frac{1}{2}.y.2x.\sin 45 = 4$ bulunur.

18.

Çözüm:

Sayıyı 100^3-3^3 şeklinde yazarak çarpanlarına ayıralım.

$100^3-3^3=(100-3)\cdot(100^2+100\cdot 3+3^2)=97\cdot 10309$ olur. 97 asaldır. 10309 sayısınında 13 ile bölündüğü görülür. $10309=13^2\cdot 61$ dir.

Asal çarpanların toplamı $97+61+13=171$ bulunur.

19.

Çözüm: $N=\underbrace{44\ldots4}_{2013}3\underbrace{55\ldots5}_{2013}6=\underbrace{44\ldots4}_{4028}-\underbrace{88\ldots8}_{2014}$ 44

$$=4(10^{4027}+\ldots+10+1)-8(10^{2013}+\ldots+10+1)$$
$$=4\cdot\frac{10^{4028}-1}{9}-8\cdot\frac{10^{2014}-1}{9}$$
$$=\frac{1}{9}(4\cdot 10^{4028}-8\cdot 10^{2014}+4)$$
$$=\left(2\cdot\frac{10^{2014}-1}{3}\right)^2$$

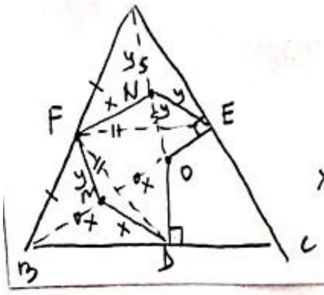
Sonuç olarak $\dfrac{10^{2014}-1}{3}$ bir tamsayı olduğu için, $\sqrt{N}=\underbrace{66\ldots6}_{2014}$ dır. $\sqrt{N}$'nin rakamları toplamı da $2014\cdot 6=12084$'tür.

20.

Çözüm: 2. satır ve 2. sütundai bütün kareleri beyaz alalım. Solda yukarıdaki karenin rengine göre iki durum söz konusudur. Eğer bu kare beyazsa ilk satır ve sütundaki diğer iki kare siyah olmalıdır. (şekil 1) Eğer bu kare siyah ise ilk satır ve sütunda kesinlikle bir tane daha siyah kare olmalıdır. ~~Bu durum için~~ [illegible]. Bu siyah kareler $\binom{2}{1}\binom{2}{1}=4$ şekilde seçilebilir. Toplam durum sayısı $4+1=5$ olur.

(şekil I)

21.



Sırasıyla AO ve BO'nun orta noktalarına N ve M diyelim.
$|EN|=|AN|=|NO|$ ve $|BM|=|MO|=|OD|$ (hipotenüse ait kenarortay) olur.
$x=|FN|=\frac{|BO|}{2}$ ve $y=|FM|=\frac{|AO|}{2}$ ($\overset{\triangle}{ABO}$ nında orta tabanlar)
$\overset{\triangle}{FNE} \cong \overset{\triangle}{DMF}$ (KKK eşliği) $m(\widehat{FMD})=m(\widehat{FNE})$ dir. FMON paralelkenardır.

$m(\widehat{FNO})=m(\widehat{FMO})$ olur. Bu da bizi $m(\widehat{ONE})=m(\widehat{OMD})$ eşitliğine götürür. $m(\widehat{OBD})=\frac{m(\widehat{OMD})}{2}$ ve $m(\widehat{OAE})=\frac{m(\widehat{ONE})}{2}$ olduğundan $m(\widehat{OBD})=m(\widehat{OAE})$ olur. İstenen oranın 1 olduğu görülür.

22.

abc...x on basamaklı sayısında a yerine $\{1,2,..9\}$ rakamlarının her biri $9!$ kez kullanılır. a'nın basamak değeri 10^9 olduğundan toplam $A=(1+2+\dots+9)\cdot 9!\cdot 10^9$ bulunur. b yerine sıfırı hesaba katmazsak $\{1,2,..9\}$ rakamlarının her biri $9!-8!$ kez kullanılır. b'nin basamak değeri 10^8 olduğundan toplam $(1+2+\dots+9)\cdot(9!-8!)\cdot 10^8$ bulunur.

a haricindeki diğer basamaklardaki rakamların toplamı
$B=(1+2+\dots+9)\cdot(9!-8!)\cdot(10^8+10^7+\dots+1)$ olur. Bu durumda genel toplam
$A+B=n=45(8!\cdot 8\cdot 111111111+9\cdot 8!\cdot 988888888)$ olur. Bu sayı 7 ile tam bölünür.

Ayrıca $n\equiv 6 \pmod{11}$ dir.

$n\equiv 6 \pmod{11}$ ve $n\equiv 0 \pmod{7}$ beraber çözülürse $n\equiv 28 \pmod{77}$ bulunur.

23.

Çözüm: a, b, c üçgenimizin kenar uzunlukları olsun. Eğer $0 < a \leq b < c$ kabul edersek; (c: hipotenüs)

$$x^3 - 30x^2 + rx - 780 = (x-a)(x-b)(x-c)$$
$$= x^3 - (a+b+c)x^2 + (ab+ac+bc)x - abc$$

olur. Buradan;

$$30 = a + b + c \qquad (1)$$
$$r = ab + ac + bc \qquad (2)$$
$$780 = abc \qquad (3)$$

(1) i kullanarak $(a+b)^2 = (30-c)^2$ elde ederiz. Pisagor teoreminden $c^2 = a^2 + b^2$ olduğundan;

$$0 = 900 - 60c - 2ab$$

dir. (3)den $ab = \dfrac{780}{c}$ olduğundan $c^2 - 15c + 26 = 0$ dır. Buradan $c = 2$ veya $c = 13$ dür.

~~Eğer~~ $c = 2$ ~~ise~~ için; $0 < a, b < 2$ ve $a + b + c \neq 30$ ~~olur~~. olduğundan denklemi sağlamaz.

~~Eğer~~ $c = 13$ ise; (3) den $ab = 60$, (1) den $a + b = 17$ elde ederiz.

O halde a, b; $x^2 - 17x + 60 = 0$ ~~ın~~ denkleminin kökleridir. O halde $(a, b) = (5, 12)$ veya $(a, b) = (12, 5)$ dir. Buradan (2)yi kullanırsak;

$$r = ab + ac + bc = 60 + 65 + 156 = 281$$ bulunur.

24.

$x \cdot y \cdot m \cdot n = 2^3 \cdot 3^4 \cdot 5^2$ olduğundan

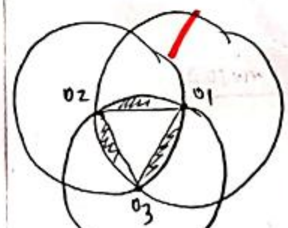
$x = 2^{a_1} \cdot 3^{b_1} \cdot 5^{c_1}$, $y = 2^{a_2} \cdot 3^{b_2} \cdot 5^{c_2}$, $m = 2^{a_3} \cdot 3^{b_3} \cdot 5^{c_3}$ ve $n = 2^{a_4} \cdot 3^{b_4} \cdot 5^{c_4}$

şeklinde yazılabilir. Bu sayıların çarpımlarının $2^3 3^4 \cdot 5^2$ olması için $a_1+a_2+a_3+a_4 = 3$, $b_1+b_2+b_3+b_4 = 4$ ve $c_1+c_2+c_3+c_4 = 2$ olmalıdır.

Özdeş nesnelerin dağılımından veya ayraç yöntemi kullanılarak

$$\binom{4+3-1}{4-1} \cdot \binom{4+4-1}{4-1} \cdot \binom{4+2-1}{4-1} = 7000$$ bulunur.

25.



$O_1O_2O_3$ bir kenar uzunluğu R olan eşkenar üçgendir. Taralı daire kesmelerinin alanlarıda eşittir.

Kesmenin Alanı = 60° lik daire diliminin alanı − Eşkenar üçgenin alanı dır.

Kesmenin Alanı = $\frac{\pi R^2}{6} - \frac{R^2\sqrt{3}}{4}$ olur.

İstenen Alan = $3.\left(\frac{\pi R^2}{6} - \frac{R^2\sqrt{3}}{4}\right) + \frac{R^2\sqrt{3}}{4} = \frac{1}{2}(\pi-\sqrt{3}).R^2$

26.

abcd dört basamaklı sayısında birler basamağını silersek $abc \mid abcd$ olması için $d=0$ olmalıdır. Yani sayımız abc0 formundadır. Onlar basamağını silersek $ab0 \mid abc0$ olmalıdır. Bunun $c=0$ olduğu görülür. Sayımızın yeni formu ab00 olur. $a00 \mid ab00$ olması için $x \in \mathbb{Z}$ için $b=ax$ ve $b00 \mid ab00$ olması için $y \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $10a=by$ olmalıdır. $10a=by$, $10a=axy$, $10=xy$ olur.

$x=1$, $y=10$ alırsak, $a=b$ olur. Koşulu sağlayan 1100, 2200, ..., 9900 olmak üzere 9 sayı bulunur. $x=2$, $y=5$ alırsak; $2a=b$ olur. Sayılarımız 1200, 2400, 3600, 4800 olmak üzere 4 tanedir. $x=5$ ve $y=2$ alırsak; $5a=b$ olur. 1500 sayısı bu durumu sağlar. $x=10$, $y=1$ için çözüm yoktur. Toplam $9+4+1=14$ sayı bu durumu sağlar.

27.

Çözüm: ifade $a=\frac{x^4}{y}+\frac{1}{y}+\frac{y}{z}+\frac{y}{z}+\frac{1}{z}+\frac{z}{x}+\frac{z}{x}+\frac{z}{x}+\frac{1}{x}$ şeklinde düzenlenerek A.O $\geq$ G.O eşitsizliği uygulanırsa $a \geq 9$ ve a'nın en küçük değeri 9 olarak bulunur.

28.

Çözüm: Verilen kümeyi şu şekilde alt kümelere ayıralım. {1,3,9,27}, {2,6,18}, {4,12} {5,15}, {7,21}, {8,24}, {10,30}, {11}, {13}, {14}, {16}, {17}, {19}, {20}, {22}, {23}, {25}, {26}, {28}, {29} Bu 20 kümenin birincisinden birbirinin üç katı olmayacak şekilde 2 eleman üç farklı şekilde seçilebilir. İkinci kümeden 2 eleman tek şekilde alınabilir. ⟹

(ilk iki kümeden en fazla ikişer eleman seçmek mümkündür) Sonraki iki elemanlı kümelerin her birinden bir eleman 2 farklı şekilde seçilebilir. Kalan bir elemanlı kümelerdende bir eleman seçilirse bu küme bir şeker kümesi ve aynı zamanda çok şeker kümeside olur. Bu şartı sağlayan $3 . 1 . 2^5 . 1^{13} = 96$ küme vardır.

29.

$m(C\hat{A}E) = m(A\hat{C}F) = 120^\circ$, $m(A\hat{E}C) = m(C\hat{A}F)$ ve $m(A\hat{C}E) = m(A\hat{F}C)$ olduğundan $\overset{\triangle}{CAE} \sim \overset{\triangle}{FCA}$ (AA benzerliği) olur. $|AC| = x$ alınırsa $\frac{x}{21\sqrt{3}} = \frac{84\sqrt{3}}{x}$, $x^2 = 5292$ $x = 42\sqrt{3}$ olur. Üçgenin çevrel çemberinin merkezi O noktası için, AOC üçgeni $30^\circ, 30^\circ, 120^\circ$ üçgenidir. $|AO| = |OC| = r$ ve $|AC| = r\sqrt{3} = 42\sqrt{3}$ olur. $r = 42$ bulunur.

30.

Çözüm: Denklem düzenlenirse $6x^2y^2 + 3x^2 - 4y^2 - 2 = 2010$, $3x^2(2y^2+1) - 2(2y^2+1) = 2010$, $(3x^2-2).(2y^2+1) = 2010$ olur. $(2y^2+1)$ tek sayı olduğundan $2010 = 2.3.5.67$ yardımıyla $2y^2+1$'in alabileceği değerler $\{1,3,5,15,67,201,335,1005\}$ bulunur. $y = \{0, \mp 1, \mp 10\}$ olduğu görülebilir. $y = 0$ için $x \notin \mathbb{Z}$ dir, $y^2 = 1$ için $x \notin \mathbb{Z}$ dir. $y^2 = 100$ için $x = \mp 2$ bulunur. Buradan $(x, y) = \{(2,10), (2,-10), (-2,10), (-2,-10)\}$ olmak üzere 4 tane tamsayı ikilisi vardır.

31.

Çözüm:

$x=0$ için $f(f(0)) = f(0)\cdot y$ ve $f(0)\cdot y$ sabit olduğundan $f(0)=0$ dır. $y=0$ alınırsa; $f(f(x)) = x$ olur.

$y = f(1)$ için $f(f(x)+x) = x + f(x)\cdot f(1)$ ve $f(f(x)) = x$ olduğundan x ve $f(x)$'i yer değiştirirsek $f(f(x)+x) = f(x) + x\, f(1)$ bulunur.

Buradan $x + f(x)\cdot f(1) = f(x) + x\, f(1)$, $(f(1)-1)\cdot(x - f(x)) = 0$ ve $f(1) = 1$ olduğu görülür.

$f(0) + f(1) = 0 + 1 = 1$ bulunur.

32.

Çözüm: (G, A, P) sırasıyla gümüş,altın ve platin paraları belirtmektedir. İlk durumda Ahmet'in elindeki paralar $(16, 15, 14)$ şeklindedir. Ali ve Ahmet'in toplam 30 altın, 30 gümüş ve 30 platin parası olduğundan; $A \leq 30, G \leq 30$ ve $P \leq 30$ dur. Herhangi bir zamanda $A+P+G = 16+15+14 = 45$ olduğundan eğer $A = 0$ alırsak $P = 45 - G$ ~~$\geq 45 - 30 = 15$~~ $\Rightarrow 15 \leq P \leq 30$ olur. G İstenilen değişimler yapıldığında (G, A, P) şu şekilde değişir:

1) $(G+2, A-1, P-1)$ 2) $(G-2, A+1, P+1)$ 3) $(G-1, A+2, P-1)$
4) $(G+1, A-2, P+1)$ 5) $(G-1, A-1, P+2)$ 6) $(G+1, A+1, P-2)$

Buradan $A - P$ farkının eski ve yeni kümelerde (mod 3)'e göre ~~eşitlik~~ eşit olduğu görülmektedir. İlk kümede $A - P = 15 - 14 = 1$ olduğundan her zaman $A - P \equiv 1$ (mod 3) ~~alırsak~~ olur. $A = 0$ için; $P \equiv 2$ (mod 3) olur. O halde 15 ile 30 arasında $17, 20, 23, 26, 29$ sayılarının her biri (mod 3) de 2 kalanını verir. Ahmet'in hiç altın parası kalmadığında bu 5 değerden biri onun platin parasının değeri olabilir. Eğer Ahmet 7 kere 2'şer tane altın para verirse $(16, 15, 14) \rightarrow (23, 1, 21)$ durumuna döner. Aşağıdaki ilk tablo Ahmet'in alabileceği en az platin para sayısını; 2. tablo ise en çok platin para sayısını göstermektedir.

G	23	21	22	23	24	25	26	27	28
A	1	2	0	1	2	0	1	2	0
P	21	22	23	21	19	20	18	16	17

G	23	21	22	20	18	19	17	15	16
A	1	2	0	1	2	0	1	2	0
P	21	22	23	24	25	26	27	28	29

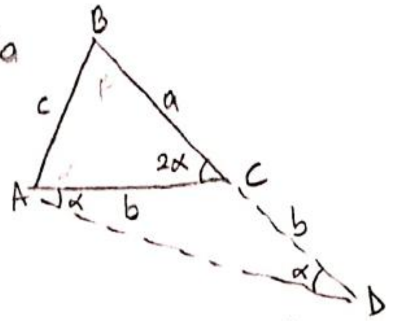
O halde platin para sayısı toplamı 17+20+23+26+29=115 dir.

ECEM DENEME ÇÖZÜMLER

1.

Çözüm

$\frac{a}{c-a} = \frac{c+a}{b} \Rightarrow c^2 - a^2 = ab \Rightarrow c^2 = a^2 + ab$ ve $c^2 = a(a+b)$ olur.



ABC üçgeninde C köşesinden BC doğrultusunda $|AC| = |CD|$ olacak şekilde $[CD]$ çizilirse $\overset{\triangle}{ACD}$'ni ikizkenar olur.

$\frac{a}{c} = \frac{c}{a+b}$ eşitliği $\overset{\triangle}{ABC} \sim \overset{\triangle}{DBA}$ üçgenlerin benzer olduğunu gösterir. $m(B\hat{A}C) = m(B\hat{D}A)$ olur. Buradan $\frac{m(\hat{A})}{m(\hat{C})} = \frac{1}{2}$ bulunur

2.

$a \geq 0$ ve $0 \leq b < 5$ olmak üzere $p = 5a + b$ olsun. $b = 0$ ise $p = 5$ olur. ($a = 1$ olmalı p asal)

$4p^2 + 1 = 4 \cdot 5^2 + 1 = 101$

$6p^2 + 1 = 6 \cdot 5^2 + 1 = 151$ sayılarıda asal olur.

$p \neq 5$ için $1 \leq b \leq 4$ olmalıdır.

$b = 1$ için $p = 5a + 1$ ve $4p^2 + 1 = 4(5a+1)^2 + 1 = 5 \cdot (20a^2 + 8a + 1)$ asal olmaz

$b = 4$ için $p = 5a + 4$ ve $4p^2 + 1 = 4(5a+4)^2 + 1 = 5 \cdot (20a^2 + 32a + 13)$ asal olmaz

benzer şekilde $b = 2$ ve $b = 3$ için $6p^2 + 1$'in asal olmadığı görülebilir.

Yani $p = 5$ tek çözümdür.

3.

Çözüm

$a^3 = 55 + 3\sqrt{6}$ ve $b^3 = 55 - 3\sqrt{6}$ alınırsa sorumuz

$a^3 + b^3 = 110$, $a.b = 1$ ise $a+b$ kaçtır şeklini alır.

$a^3 + b^3 = (a+b).(a^2 - ab + b^2)$ ve $a^2+b^2 = (a+b)^2 - 2ab$ yerine

yazılırsa

$a^3+b^3 = 110 = (a+b).((a+b)^2 - 3ab) = x.(x^2-3)$

$110 = x.(x^2-3)$ $\quad x^3 - 3x - 110 = 0$ bulunur.

110'un çarpanları kök olarak denendiğinde $x=5$'in

kök olduğu görülür.

$x^3 - 3x - 110 = (x-5)(x^2+5x+22)$ olur. Buradan

diğer köklerin reel olmadığı görülür.

$x = a + b = 5$ bulunur.

4.

Çözüm:

$1.\binom{10}{0} + 2\binom{10}{1} + \cdots + 11.\binom{10}{10} = 1.\binom{10}{10} + 2\binom{10}{9} + \cdots + 11.\binom{10}{0}$ yazılabilir.

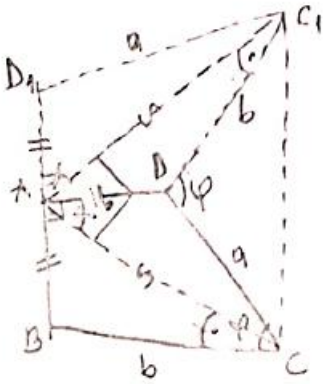
bu ifadeler alt alta yazılarak toplanırsa

$12\binom{10}{10} + 12\binom{10}{9} + \cdots + 12\binom{10}{0} = 12.2^{10} = 3.2^{12}$ bulunur.

istenen bunun yarısı yani 3.2^{11} dir.

5.

ABCD dörtgeni A noktasından saat yönünün tersine $90°$ döndürüldüğünde B, C ve D noktaları B_1, C_1 ve D_1 noktalarına dönüşmüş olsun. $B_1 = D$, $|DC_1| = b$ ve $|D_1C_1| = a$ olur.



ABCD ve ADC_1D_1 dörtgenleri eş olduğundan

$|AC_1| = |AC|$

$m(\widehat{ACB}) = m(\widehat{AC_1D})$

$m(\widehat{DAC}) = m(\widehat{D_1AC_1})$ olur.

Bu eşitliklerin sonucunda $m(\widehat{C_1AC}) = 90°$ ve $m(\widehat{C_1DC}) = \varphi$ bulunur.

$[CC_1]$ çizildikten sonra C_1DC üçgeninde cosinüs teoremi ve C_1AC üçgeninde pisagor teoremi uygulanırsa

$$|AC| = \sqrt{\frac{a^2+b^2+2ab\sin\varphi}{2}}$$ bulunur

6.

Çözüm

n^4-360n^2+400 ifadesini terim ekleyip çıkartarak çarpanlarına ayıralım

$$n^4+40n^2+400-400n^2$$

$$(n^2+20)^2-(20n)^2$$

$(n^2+20n+20)(n^2-20n+20)$ çarpımının asal olması isteniyor. O zaman çarpanlardan küçük olanı 1 olmalıdır.

$$n^2-20n+20=1$$

$$n^2-20n+19=(n-19)(n-1)=0$$

$n=1$ ve $n=19$ bulunur.

Bu değerler 2. çarpanda yerine yazılırsa $1^2+20\cdot1+20=41$ ve $19^2+20\cdot19+20=761$ bulunur. Bu değerlerin ikisi de asal olduğundan istenen $41+761=802$ dir.

7.

ÇÖZÜM:

$$a_{n+1} = a_n^2 + 3a_n + 1$$

$$a_{n+1} + 1 = a_n^2 + 3a_n + 2 = (a_n+1)(a_n+2)$$

$$\frac{1}{a_{n+1}+1} = \frac{1}{(a_n+1)(a_n+2)} = \frac{1}{a_n+1} - \frac{1}{a_n+2} \text{ olur}$$

$$\frac{1}{a_n+2} = \frac{1}{a_n+1} - \frac{1}{a_{n+1}+1} \text{ (ifade teleskopik hale geldi)}$$

$$A = \sum_{k=1}^{8} \frac{1}{2+a_k} = \frac{1}{a_1+1} - \frac{1}{a_9+1} \text{ olur.}$$

$$S = \frac{4}{5} - \frac{1}{a_9+1} \text{ ve } a_9 = \frac{9-5A}{4-5A} \text{ bulunur.}$$

8.

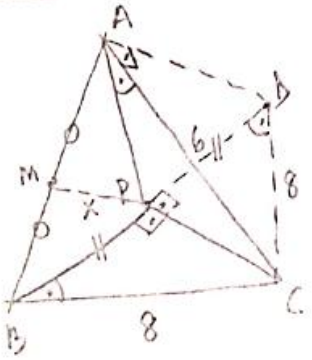
Çözüm

9, 4, 6 ve 8 sayılarından başlanırsa 9 basamaklı sayı elde edilemediği görülür. Köşelerden başlanmalıdır.

uygun sayı 765419283 olarak bulunur.

9.

Çözüm



B, P ve D noktaları doğrusal ve $|BP| = |PD|$ olacak şekilde PD çizilir.

BCD ikizkenar üçgen olur.

$m(\widehat{CBD}) = m(\widehat{BDC}) = m(\widehat{PAC})$ olduğundan

A, P, C ve D noktaları çembersel olur.

$m(\widehat{DAC}) = m(\widehat{DPC}) = 90°$ (Aynı yayı gören çevre açılar)

DAC dik üçgeninde pisagor uygulanırsa

$|AD|^2 + 6^2 = 8^2$

$|AD| = 2\sqrt{7}$ bulunur.

MP uzunluğu ABD üçgeninde orta taban olduğundan $|PM| = \sqrt{7}$ dir.

10.

$$b(n) = k \iff |\sqrt{n} - k| < \frac{1}{2} \iff -\frac{1}{2} < \sqrt{n} - k < \frac{1}{2} \iff k - \frac{1}{2} < \sqrt{n} < k + \frac{1}{2}$$

$$\iff k^2 - k + \frac{1}{4} < n < k^2 + k + \frac{1}{4} \iff n = k^2 - k + 1,\ k^2 - k + 2,\ \ldots,\ k^2 + k$$ olur.

yani her k pozitif tamsayısı için $b(n) = k$ eşitliğini sağlayan n'lerin sayısı $(k^2+k) - (k^2 - k + 1) + 1 = 2k$ tanedir.

$44^2 < 2020 < 45^2$ ve $b(n) = 44$ olan en büyük $n = 44^2 + 44 = 1980$

ve $2020 - 1980 = 40$ olduğundan,

$$S = \sum_{k=1}^{44} (2k) \cdot k + 40 \cdot 45 = 2 \cdot \frac{44 \cdot 45 \cdot 89}{6} + 40 \cdot 45$$

$$S = 44 \cdot 15 \cdot 89 + 40 \cdot 45 \equiv (-2) \cdot (-8)(-3) + (-6) \cdot (-1) \equiv -42 \equiv 4 \pmod{23}$$

bulunur.

11.

Çözüm

$m=0$ için $f(f(0))=1$ ($f(0)=a$ olsun) $f(a)=1$ olur.

$m=1$ için $f(f(1))=1$ ($f(1)=b$ olsun) $f(b)=1$ olur.

$m=a$ için $f(f(a))=a^2-a+1 \Rightarrow f(1)=a^2-a+1$ ve $b=a^2-a+1$ olur.

$m=b$ için $f(f(b))=b^2-b+1 \Rightarrow f(1)=b^2-b+1 \Rightarrow b=b^2-b+1 \Rightarrow b=1$ bulunur.

$b=a^2-a+1$ ifadesinde $b=1$ yazılırsa

$1=a^2-a+1 \Rightarrow a^2-a=0 \Rightarrow a(a-1)=0 \Rightarrow a=1$ ve $a=0$ bulunur.

$f(0)=a$ kesinlikle $a=0$ olsun $f(0)=0$ olur.

$f(f(m))=m^2-m+1$

$m=0$ için $f(f(0))=1 \Rightarrow f(0)=1$ olur ve kabulümüzle çelişir.

O zaman $f(0)=1$ dir.

12.

a) 6 b) 10 c) 12 d) 14 e) 21

$A=\binom{9}{4}=126$

$B=\binom{10}{3}=120$

$A-B=6$ bulunur.

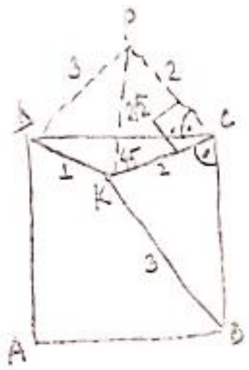
Çözüm:

Sorunun birinci kısmını şu şekilde yorumlayalım elimizde sekiz tane 0 ve dört tane 1 rakamı olsun. Bu rakamları 1'ler yan yana gelmeyecek şekilde sıralayalım. Sıfırlar tek türlü dizilir. 1'lerin yan yana gelmemesi için sıfırların arasına yerleştirilmesi gerekir. Sıfırların gelebileceği 9 yer mevcut bunlardan 4 tanesi $\binom{9}{4}$ şekilde seçilebilir.

Herhangi bir sıralama 010010100001 olsun. Bu sıralama kümedeki elemanların altına yazılırsa istenen elemanlar $\{2,5,7,12\}$ olarak bulunur.

13.

Çözüm



Karenin dışında alınan P noktası yardımıyla

KBC üçgenine eş PDC üçgeni çizilir.

$m(\widehat{KCB}) = m(\widehat{PCD})$ olduğundan $m(\widehat{PCK}) = 90°$ olur.

$|PK| = 2\sqrt{2}$ bulunur (pisagor)

PCK üçgeni ikizkenar dik üçgendir.

DKP üçgeninde $1^2 + (2\sqrt{2})^2 = 3^2$ olduğundan dik üçgendir ve $m(\widehat{DKP}) = 90°$ olur.

$m(\widehat{DKC}) = 90° + 45° = 135°$ dir.

14.

Çözüm

$a|b$ ve $a|c$ olduğuna göre $a|b+c$ ve $a|a+b+c = 100$ olur.

$a|100$ olduğundan $a = \{1, 2, 4, 5, 10, 20, 25, 50, 100\}$ olabilir.

$a+b+c = 100$, $1 + \frac{b}{a} + \frac{c}{a} = \frac{100}{a}$ ve $\frac{b}{a} + \frac{c}{a} = \frac{100}{a} - 1$ olur. Buradan

a'nın 50 ya da 100 olamayacağı görülür çünkü $\frac{b}{a}$ ve $\frac{c}{a}$ pozitif tamsayılar olmalıdır.

Her a sayısı için $\left(\frac{b}{a}, \frac{c}{a}\right)$ ikililerinin sayısı $\frac{100}{a} - 2$ tanedir.

(örneğin $a = 1$ için $b + c = 99$ olur. (b, c) ikilileri 98 tanedir)

$a = \{1, 2, 4, 5, 10, 20, 25\}$ kümesinin elemanları için

$\frac{100}{1} + \frac{100}{2} + \frac{100}{4} + \frac{100}{5} + \frac{100}{10} + \frac{100}{20} + \frac{100}{25} - 2 \cdot 7 = 200$ tane (a, b, c) üçlüsü bulunur.

15.

Çözüm

Önce $x^3-8x+16\equiv 0 \pmod{11}$ denklemini çözelim

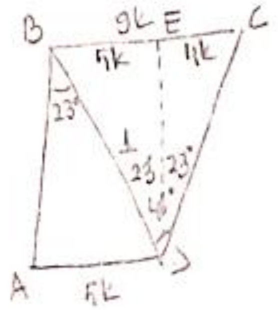
$x^3+3x+5\equiv 0 \pmod{11}$ $x=0,\pm1,\pm2,\pm3,\pm4,\pm5$ sayıları denklemde yerine yazılırsa hiçbirinin denklemi sağlamadığı görülür: Denklemin (mod 121)'de çözüm kümesi boş kümedir.

16.

Çözüm: $n \neq 4$ olduğu durumlarda Evren doğru tahmini yapmıştır. Evren'in aynı sayıda tanıdıklarının ne ortak tanıdık, ne de ortak bir bilinmeyen misafir olduğunu varsayalım. Evren'in misafirlerinden oluşan K kümesinden aynı sayıda tanıdığa sahip A ve B misafirleri seçelim. Varsayımımıza göre K kümesindeki A ve B ne $\frac{1}{2}n$, ne de $\frac{1}{2}n-1$ tanıdığa olsun. (K kümesinde), bu varsayım A ve B'nin birbirini tanıyıp tanımadığına bağlı olsun. Evren'in tahmini n'in tek olduğu durumlarda doğruluğunu kanıtlıyor. Şimdi n'in çift ve 6'dan büyük olduğunu farz edelim. $K\backslash\{A,B\}$ kümesinden aynı sayıda tanıdığı olan C ve D misafirleri seçelim. $K\backslash\{A,B\}$ kümesinden alınan her misafir ya A ile tanıdık ya da B ile tanıdık ama ikisiyle de aynı anda tanıdık değil. K kümesinde C ve D aynı sayıda tanıdığa sahip; buradan da görebiliriz ki her ikisi de $\frac{1}{2}n$ yada $\frac{1}{2}n-1$ tanıdığa sahiptir. Sonuç olarak, $K\backslash\{A,B,C,D\}$ kümesinden seçilen aynı sayıda tanıdığa sahip E ve F misafirleri olsun. ($n \geq 6$ için mümkündür.) $K\backslash\{A,B,C,D\}$ kümesinde olan her misafir $\{A,B,C,D\}$ kümesi için de kesin olarak 2 tane tanıdığa sahiptir. E ve F misafirleri K kümesinde aynı tanıdığa sahiptir. Bu da her ikisinin $\frac{1}{2}n$ ya da $\frac{1}{2}n-1$ sayıda tanıdığa sahip olduğunu gösterir. Böylece A, B, C, D, E, F arasından seçilen en az 4 kişi aynı sayıda tanıdığa sahiptir. (K kümesinde) Bu dört misafir arasından üçünü seçelim. Daha sonra, bu 3 kişiden biri ya ortak tanıdığa sahip ya da ikisi ortak bilinmeyene sahiptir. $n=4$ için Evren doğru tahmin yapmamıştır. Aşağıdaki figür buna karşıt bir örnektir.

17.

Çözüm



D noktasından AB'ye çizilen paralel doğrunun BC yi kestiği nokta E olsun ADEB paralelkenardır.

$|AD| = |BE| = 5k$ ve $|EC| = 4k$ olur.

$m(\widehat{ABD}) = m(\widehat{BDE}) = 23°$ (iç ters açılar) ve

$[DE]$, $\overset{\triangle}{BDC}$ 'nin de açıortay olur.

$\frac{1}{5k} = \frac{|DC|}{4k} \Rightarrow |DC| = \frac{4}{5}$ bulunur.

18.

Çözüm

$m > n$ olmak üzere $m^2 - n^2 = 96 = (m-n)(m+n)$ olur.
m ve n ya ikiside tek ya da ikiside çifttir. Her iki durumdada m+n ve m-n çifttir. Bu durumda (m+n, m-n) sıralı ikilileri (48,2), (24,4), (16,6), (12,8) olabilir. (m,n) sıralı ikililerde (25,23) (14,10), (11,5) ve (10,2) olmak üzere 4 tane olur.

19.

Çözüm: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt[3]{x+2} + \sqrt[3]{x+3} + \sqrt[3]{x+4}$ kesinlikle artan bir fonksiyondur. ~~Ve x = -3 tek çözümdür.~~

ve $X = -3$ denklemin tek çözümüdür.

20.

Çözüm: $\dfrac{2006n}{2006+n} = \dfrac{2006^2+2006n}{2006+n} - \dfrac{2006^2}{2006+n} = 2006 - \dfrac{2006^2}{2006+n}$

Buradan $2006n$, $2006+n$'e bölünebiliyorsa $2006+n$ de 2006^2 sayısının bir çarpanı olmalıdır. $1 \leq n \leq 2005$ ise $2007 \leq 2006+n \leq 4011$ elde edilir. ~~$2006^2 = 2^2+17^2+59^2$, 2007 ile 4011 arasındaki $2006+n$'nin tek çarpanı 3841'dir. Yani $2006+n = 3841$, $n = 1475$ olur.~~ çarpı.

$2006^2 = 2^2.17^2.59^2$ olduğundan 2007 ile 4011 arasındaki çarpan $59^2 = 3481$ olarak bulunur.

$n+2006 \mid 3841$ olabilmesi için $n+2006 = 3841$ $n = 1475$ olarak bulunur.

21.

Çözüm

Oluşacak üçgenlerin köşelerinin koordinatları tamsayı olacağından (x,y) tamsayı ikilileri 16 tane olur.

16 nokta ile $\binom{16}{3} = 560$ üçgen elde edilir. Fakat seçilen bazı üçlüler doğrusal olduğundan üçgen belirtmezler.

$8.\binom{4}{3} = 32$ yatay ve dikeyde

$4.\binom{3}{3} = 4$ tane üçlü çapraz

$2.\binom{4}{3} = 8$ tane köşegen üzerinde

$560 - (32+4+8) = 516$ üçgen çizilebilir.

22.

Çözüm:

$\frac{m+4}{m^2+7}$ sadeleşmeyen bir kesir ise $\frac{m^2+7}{m+4}$ kesride sadeleşmez.

$$\frac{m^2+7}{m+4} = \frac{m^2-16+23}{m+4} = \frac{(m-4)\cancel{(m+4)}}{\cancel{m+4}} + \frac{23}{m+4} = m-4+\frac{23}{m+4}$$

$23 \mid m+4$ olursa kesir sadeleşebilir. $0 < m < 1000$ ve

$4 < m+4 < 1004$ olmak üzere 5'ten 1004'e kadar olan sayılardan 43 tanesi 23 ile bölünebilir.

Buradan cevap $1000-43=957$ olarak bulunur.

23.

Çözüm:

$f(x)=\frac{1}{2^{2x-1}+1}$ fonksiyonunu 2 ile genişletelim.

$f(x)=\frac{2}{4^x+2}$ olur. Buradan $f(x)+f(1-x)=1$ olduğu görülebilir. Yani $f\left(\frac{1}{2021}\right)+f\left(\frac{2020}{2021}\right)=1$ olur.

Bu şekilde 1010 tane ikili vardır. Cevap 1010 bulunur.

24.

Çözüm:

Bu işlemin arka arkaya tekrarlanabilmesi için her adımda bulunan aritmetik ortanın çift olması gerekir. Eğer aritmetik orta tek sayı olursa bir sonraki adımda aritmetik orta tamsayı gelmez ve işlem yapılamaz. Ayrıca hangi sayı silinmiş olursa olsun tahtadaki iki sayının arasındaki fark önceki iki sayının farkının yarısıdır. İki sayının arasındaki fark çift sayı ise aritmetik ortaları tamsayı olur ve 4'ün katı ise aritmetik orta çift sayı olur.

Başlangıç sayıları a ve b olmak üzere $a-b=2^n$ (n max) olursa işlemdeki tekrar sayısı fazla olur. $2^n=1024=2^{10}$ olduğundan işlem en fazla 10 kez tekrarlanabilir.

25.

Çözüm:

Üçgenin B köşesinden çizilen yüksekliğinin AC'yi kestiği nokta D olsun.

ABD üçgeninde pisagordan $3^2=1^2+|BD|^2$, $|BD|=2\sqrt{2}$ bulunur.

$|AB|=|BC|$ olduğundan çevrel çemberin merkezi O noktası BD üzerindedir.

$|BO|=|AO|=r$ ve $|OD|=2\sqrt{2}-r$ alınırsa

ADO üçgeninde pisagor teoreminden

$(2\sqrt{2}-r)^2=1^2+r^2$

$r=\frac{9\sqrt{2}}{8}$ bulunur.

Dairenin alanı $=\pi r^2=\pi\left(\frac{9\sqrt{2}}{8}\right)=\frac{81\pi}{32}$ bulunur.

26.

Çözüm

$x^2+7x+11=0$ denkleminin bir kökü p ise $p^2+7p+11=0$ ve $p^2+7p=-11$ bulunur. istenen denklem düzenlenirse

$$(p-2)(p+1)\cdot(p+6)(p+9)=(p-2)(p+9)\,(p+1)(p+6)=(p^2+7p-18)(p^2+7p+6)$$

bulunur. $p^2+7p=-11$ yerine yazılırsa

$$(-11-18)\cdot(-11+6)=-29\cdot-5=145 \text{ bulunur.}$$

27.

Çözüm:

Her bir kardeşin yaşı $128=2^7$ 'nin çarpanıdır.
Bu yüzden ikizler $2^0=1, 2^1=2, 2^2=4$ veya $2^3=8$ yaşlarında olabilirler. Bu durumda Kemal'in yaşı $\frac{128}{1}=128$, $\frac{128}{2^2}=32$, $\frac{128}{4^2}=8$ veya $\frac{128}{8^2}=2$ olabilir. İkiz kardeşler Kemalden daha büyük olduklarına göre, ikizler 8 kemal 2 yaşındadır

Yaşların toplamı $2+8+8=18$ bulunur

28.

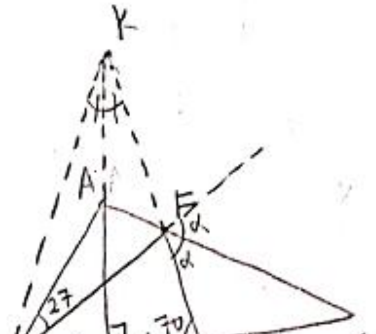
Çözüm:

İlk önce verilen şartı göz önüne alarak A, B, C ve D toplarını kutulara yerleştirelim. Bu işlemi 10 farklı şekilde yapabiliriz. Bunlar 1234, 1245, 1256, 1267, 2345, 2356, 2367, 3456, 3467 ve 4567'dir. Bu durumda A'nın gidebileceği 4 farklı yer ve B nin gidebileceği tek kutu vardır. C ve D'nin gidebileceği yerler belli olmasına karşın kendi aralarında yer değiştirebilirler. Geriye kalan 3 kutudan birinede E topu atılabilir.

Cevap $10 \times 4 \times 2 \times 3 = 240$ bulunur.

29.

Çözüm:



$m(E\hat{F}C) = \alpha$ alınırsa $m(B\hat{F}E) = 180 - 2\alpha$ olur.

BE uzatılırsa $m(C\hat{E}K) = \alpha$ olur.

$EF \cap AD = \{K\}$ noktası belirlenir ve BK çizilir. BKE üçgeninin ikizkenar olduğu görülür. $m(B\hat{K}D) = m(D\hat{K}E)$ olur.

$m(K\hat{F}A) = m(A\hat{F}B) = \alpha$ (ters açılar)

A noktası BKF üçgeninin iç teğet çemberinin merkezi olur.

$m(K\hat{B}A) = m(A\hat{B}F) = 27°$ dir.

BKE üçgeni ikizkenar olduğundan $m(F\hat{B}E) = 70 - 2.27 = 16°$ bulunur.

30.

Çözüm:

Sayılarımız x (tamkare olsun) ve y olsun. $x+y = x.y - 2006$ şeklinde yazılabilir. Denklem düzenlenirse $xy - x - y + 1 = 2007$ ve $(x-1).(y-1) = 2007$ olur. $2007 = 3^2.223$ şeklinde asal çarpanlarına ayrılır. 2007'nin bölenleri buradan 1, 3, 9, 223, 669 ve 2007 olarak bulunur. x'in tamkare olabilmesi için $x-1=3$ olmalıdır. Diğer çarpanlar bu şartı sağlamaz. Bu durumda $y-1=669$ olur.

$x=4$ ve $y=670$ bulunur. Cevap $670-4=666$ olur.

31.

Çözüm

$\sqrt{a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta}$ ve $\sqrt{a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta}$ elemanlarını seçerek Karesel ortalama $\geq$ Aritmetik ortalama eşitsizliğini uygularsak

$$\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \geq \frac{\sqrt{a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta} + \sqrt{a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta}}{2}$$ bulunur.

Bu durumda en büyük değer $\sqrt{2(a^2+b^2)}$ olarak bulunur.

En küçük değeri bulmak için ifadenin karesi alınırsa

$= a^2+b^2+2\sqrt{a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta}.\sqrt{b^2\cos^2\theta + a^2\sin^2\theta}$ ve C.S. kullanılarak

$\geq a^2+b^2+2ab\cos^2\theta + 2ab\sin^2\theta = (a+b)^2$ bulunur.

32.

Çözüm

Aslı şekerleri

hergün bir tane yiyerek 1 farklı şekilde

dokuz gün birer tane bir gün üç tane yiyerek $\frac{10!}{9!} = 10$ şekilde

$1+1+\dots+1+3+3$ şeklinde yiyerek $\frac{8!}{6!.2!} = 28$ şekilde

$1+1+1+3+3+3$ şeklinde yiyerek $\frac{6!}{3!3!} = 20$ şekilde

hergün üçer tane yiyerek 1 şekilde bulunur.

Toplam $= 1+20+28+10+1 = 60$

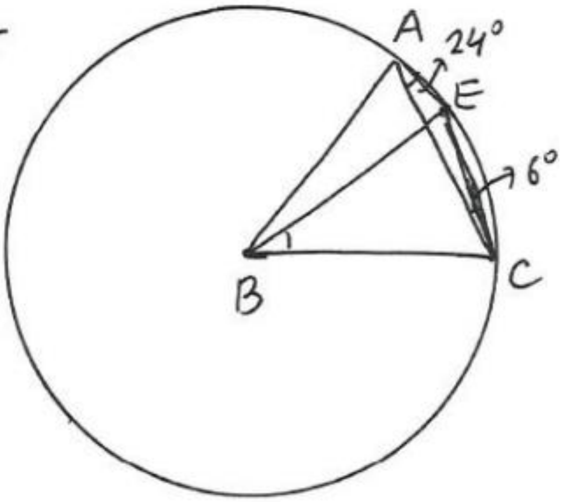
REFET DENEME ÇÖZÜMLER

1.

D) 48 E)Hiçbiri

Merkezi B'de bulunan, yarıçapı [AB] olan çember çizelim. $m(\widehat{ABC}) = 60°$, $m(\widehat{AEC}) = 180° - (24° + 6°) = 150°$ olduğundan E noktası çemberin üzerindedir. O halde $m(\widehat{EBC}) = m(\overset{\frown}{EC}) = 2 \cdot m(\widehat{EAC}) = 2 \cdot 24° = 48°$

Cevap: (D)



2.

$\phi(100) = (2^2 - 2^1) \cdot (5^2 - 5^1) = 40$ olduğundan Euler Teoreminden $3^{40} \equiv 1 \pmod{100}$.
O halde $9 \cdot 3^{998} \equiv 3^{40} \equiv 1 \pmod{100}$,
Dolayısıyla $3^{998} \equiv \frac{1}{9} \equiv \frac{101}{9} \equiv \ldots \equiv \frac{801}{9} \equiv$
$\equiv 89 \pmod{100}$. $8 + 9 = 17$

Cevap: (E)

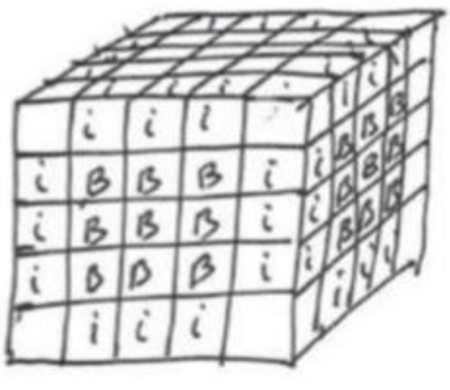
3.

z tek sayı olmalı ve $1001z \leq 2013$, dolayısıyla $z=1$. Buradan $20x+16y=1012$, buradan da $5x+4y=253$ elde edilir. $5x \equiv 253 \equiv 1 \pmod 4$ yani $x \equiv 1 \pmod 4$; $4y \equiv 253 \equiv 3 \pmod 5$, buradan da $y \equiv 2 \pmod 5$ bulunur. O halde $x=4k+1$, $y=5m+2$ şeklinde yazılabilir. $20k+5+20m+8=253$, buradan da $k+m=12$. $(k,m)=(0,12),(1,11),\ldots,(12,0)$ olabilir

Cevap: (A)

4.

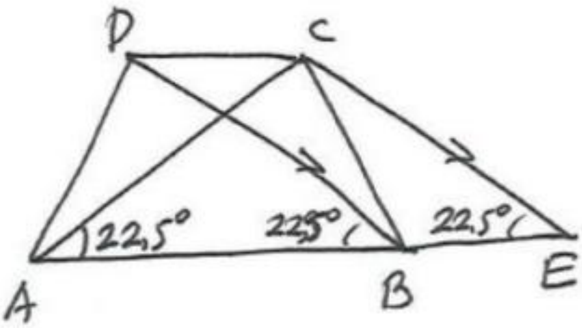
Küpün her yüzündeki bir yüzü boyalı küplerin (B ile gösterilen) sayısı 9 olduğundan bunların toplam sayısı $6 \cdot 9 = 54$ olacak. Her ayrıt üzerindeki iki yüzü boyalı (i ile gösterilen) küplerin sayısı 3 olduğundan bunların toplam sayısı $12 \cdot 3 = 36$ olacak. $54-36=18$



Cevap: (B)

5.

AB üzerinde $CE \parallel DB$ olacak şekilde E alalım.



$m(\widehat{AEC}) = m(\widehat{ABD}) =$
$m(\widehat{CAB}) = 22{,}5°$. O halde
$m(\widehat{ACE}) = 180° - 2 \cdot 22{,}5° = 135°$
$|EC| = |AC| = 10\sqrt{2}$
$\widehat{DAC} \cong \widehat{BCE}$ olduğundan $A(ABCD) = A(\widehat{CAE}) =$
$= \frac{1}{2} \cdot |CA| \cdot |CE| \sin 135° = \frac{1}{2} \cdot 10\sqrt{2} \cdot 10\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 50 \cdot \sqrt{2}$
Cevap: (D)

6.

$p = 7$ ise, $\frac{p^3-1}{18} = 19$, $\frac{p^3+1}{8} = 43$ sağlar
$p \neq 7$ ise, $p^3 \equiv 1 \pmod 7$ veya $p^3 \equiv -1 \pmod 7$
Birinci durumda $7 \mid (p^3-1)$, dolayısıyla
$\frac{p^3-1}{18}$ asalsa, $\frac{p^3-1}{18} = 7$, yani $p^3 = 127$ olmalı, çelişki!
Benzer şekilde ikinci durumda $p^3 = 55$ çelişkisi elde edilir. Böylece sadece $p = 7$ olabilir
Cevap: (B)

7.

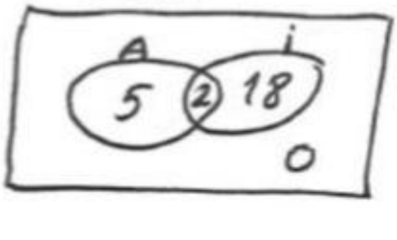
$$x^2+1=x \Rightarrow x^2-x+1=0 \Rightarrow x^3+1=(x+1)(x^2-x+1)=0$$
$$\Rightarrow x^3=-1 \Rightarrow x^{123}+\frac{1}{x^{123}}-99\cdot x^{99}=$$
$$=(-1)^{41}+\frac{1}{(-1)^{41}}-99\cdot(-1)^{33}=-1-1+99=97$$

Cevap: (C)

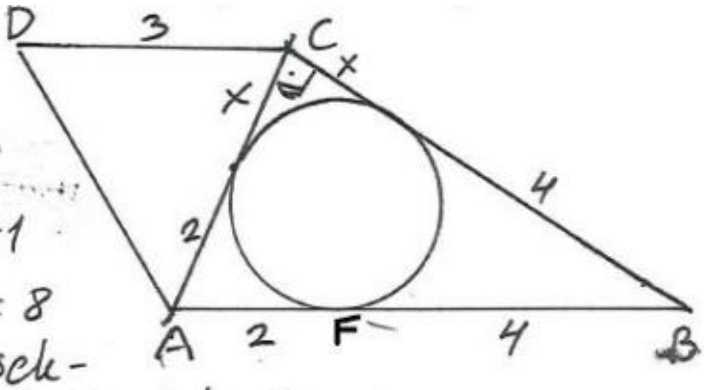
8.

Almanca bilmeyenlerin sayısı ≤ 18
İngilizce bilmeyenlerin sayısı ≤ 5
Her iki dili bilenlerin sayısı $= 2$
O halde toplam öğrenci sayısı en fazla $15+5+2=25$ olabilir.

Cevap: (D)



9.



$(x+2)^2+(x+4)^2=6^2$

$x^2+6x-8=0$

$x=-3+\sqrt{17}$; O halde

$|AC|=\sqrt{17}-1$; $|BC|=\sqrt{17}+1$

$\text{Alan}(A\widehat{B}C)=\dfrac{(\sqrt{17}-1)(\sqrt{17}+1)}{2}=8$

$D\widehat{A}C$ ile $A\widehat{B}C$'nin yükseklikleri eş ve $|AB|=2\cdot|DC|$ olduğundan

$\text{Alan}(D\widehat{A}C)=\frac{8}{2}=4$. Bu durumda $\text{Alan}(ABCD)=8+4=12$

Cevap: (C)

10.

$(2n^3-n^2+6,\ 2n^2+n-1)=(-2n^2+n+6,\ 2n^2+n-1)=$

$\dfrac{\times \qquad n}{2n^3+n^2-n}$

$=(2n+5,\ 2n^2+n-1)=(2n+5,\ -4n-1)=(2n+5,\ 9)$

$\dfrac{\times \qquad n}{2n^2+5n}$ $\qquad$ $\dfrac{\times \qquad 2}{4n+10}$

Buradan ebob'un alabileceği en büyük değerin 9 olabileceği ortaya çıkıyor.

Cevap: (C)

11.

D) $56\sqrt{2}$ E) $58\sqrt{2}$

AGO'dan $x^2+4xy+4y^2+2z^2=$

$= x^2+2xy+2xy+4y^2+z^2+z^2 \geq$

$\geq 6\sqrt[6]{x^2 2xy\, 2xy\, 4y^2 z^2 z^2} = 6\sqrt{4^2(xyz)^4} =$

$= 6\sqrt[6]{4^2\cdot 3^{12}} = 54\sqrt[3]{4}$

Öte yandan $x=z=3\sqrt[3]{4}$, $y=\frac{3\sqrt[3]{4}}{2}$ alınırsa $xyz=27$ ve ifade $54\sqrt[3]{4}$ olur

Cevap: (C)

12.

C) 37 D) 38 E) 45

1'le biten sayı alınırsa, 9'la biten sayı alınamaz. Benzer şekilde 2 ile 8, 3 ile 7 ve 4 ile 6 aynı anda alınamaz. Öte yandan 0'la ve 5'le biten en fazla birer sayı alınabilir. O halde $4\cdot 9+2=38$'den fazla sayı alınamaz. 38 sayı şöyle alınabilir:

11, 21, …, 91, 12, 22, …, 92, 13, 23, …, 93, 14, 24, …, 94, 10, 15

Cevap: (D)

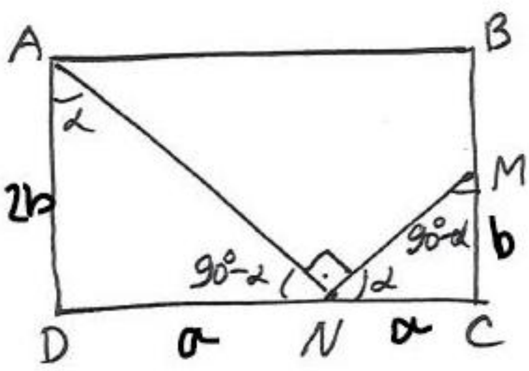
13.

$\widehat{ADN} \sim \widehat{NCM}$, o halde

$\frac{a}{b} = \frac{2b}{a}$, buradan da

$a^2 = 2b^2$ ve $a = b\sqrt{2}$ bulunur.

$\frac{|AB|}{|BC|} = \frac{2a}{2b} = \frac{b\sqrt{2}}{b} = \sqrt{2}$



Cevap: (B)

14.

$x^3-4x^2+x+2 \equiv 0 \pmod 3$ denkliğinin tek çözümü

$x \equiv 1 \pmod 3$, o halde $x = 3k+1$

$(3k+1)^3 - 4(3k+1)^2 + 3k+1+2 \equiv 0 \pmod 9 \Rightarrow$

$1 - 24k - 4 + 3k + 3 \equiv 0 \pmod 9 \Rightarrow k \equiv 0 \pmod 3 \Rightarrow k = 3m \Rightarrow$

$x = 9m+1 \Rightarrow (9m+1)^3 - 4(9m+1)^2 + 9m+1+2 \equiv 0 \pmod{27} \Rightarrow$

$1 - 18m - 4 + 9m + 3 \equiv 0 \pmod{27} \Rightarrow m \equiv 0 \pmod 3 \Rightarrow m = 3t$

$x = 27t + 1 \Rightarrow x \equiv 1 \pmod{27}$

Cevap: (D)

15.

$(a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b)$ formülünden

$A^3 = 20 - 14\sqrt{2} + 20 + 14\sqrt{2} + 3\sqrt[3]{400-392} \cdot A$

$A^3 - 6A - 40 = 0$. $A = 4$ sağlar.

$(A^3 - 6A - 40) = (A-4)(A^2+4A+10)$

$\Delta = 4^2 - 4 \cdot 10 < 0 \Rightarrow A^2+4A+10=0$ denkleminin gerçel kökü yoktur.

Cevap: (B)

16.

C) 2400 D) 2880 E) 3200

Yan yana gelen sesli ikilisini (örneğin Ü ile E'yi) $\binom{3}{2}=3$ yolla seçeriz, $2!=2$ yolla sıralarız. Sessizleri $4!=24$ yolla sıralarız; örneğin

_ S _ R _ M _ L _

Şimdi boş kutucuklardan birini $\binom{5}{1}=5$ yolla seçip sesli ikilisini, geriye kalan 4 kutudan birini $\binom{4}{1}=4$ yolla seçip üçüncü sesliyi (İ) yerleştiririz.

$3\cdot 2\cdot 24\cdot 5\cdot 4=2880$

Cevap: (D)

17.

$m(\widehat{ABL})=90°-x \Rightarrow m(\widehat{ALB})=90°$

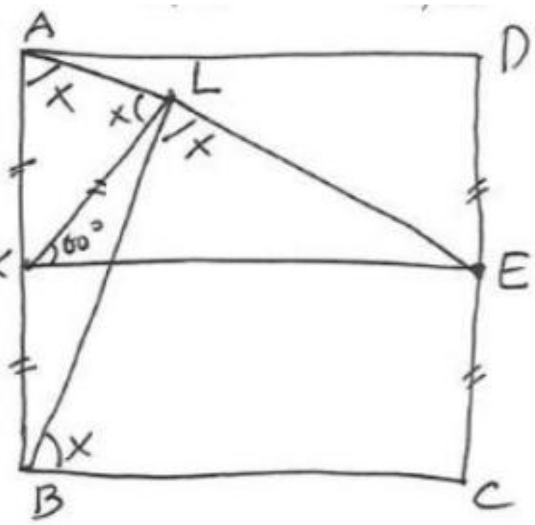
$EK \parallel BC$ çizelim. $|KL|=|AK|=|KB|$

$\Rightarrow m(\widehat{KLA})=x \Rightarrow m(\widehat{ELK})=90°$

$|KE|=|AB|=2|KL| \Rightarrow m(\widehat{LKE})=60°$

$\Rightarrow m(\widehat{LKB})=150° \Rightarrow$

$2x=150° \Rightarrow x=75°$



Cevap: (D)

18.

$\phi(55) = (5-1)\cdot(11-1) = 40$ olduğundan her $k \in \{1, 2, \dots, 19\} \setminus \{5, 10, 15, 11\}$ için $k^{40} \equiv 1 \pmod{55}$, dolayısıyla $k^{41} \equiv k \pmod{55}$.
$k = 5, 10, 15$ için $k^{10} \equiv 1 \pmod{11} \Rightarrow k^{41} \equiv k \pmod{11}$ ve $k^{41} \equiv 0 \equiv k \pmod 5$ olduğundan $k^{41} \equiv k \pmod{55}$
$11^{41} \equiv 0 \equiv 11 \pmod{11}$ ve $11^{41} \equiv 1 \equiv 11 \pmod 5$ olduğundan $11^{41} \equiv 11 \pmod{55}$. O halde
$1^{41} + 2^{41} + \dots + 19^{41} \equiv 1 + 2 + \dots + 19 \equiv \frac{19 \cdot 20}{2} \equiv$
$\equiv 190 \equiv 25 \pmod{55}$.
Cevap: (E)

19.

$$10 = \frac{1}{9x} + \frac{1}{3y} + \frac{1}{z} \overset{AGO}{\geqslant} 3\sqrt[3]{\frac{1}{9x \cdot 3y \cdot z}} = \frac{3}{3\sqrt[3]{xyz}}$$

O halde $\sqrt[3]{xyz} \geqslant 0{,}1$ ve $xyz \geqslant 0{,}001$
$x = \frac{1}{30}$, $y = \frac{1}{10}$, $z = \frac{3}{10}$ alınırsa eşitlik sağlanır.
Cevap: (A)

20.

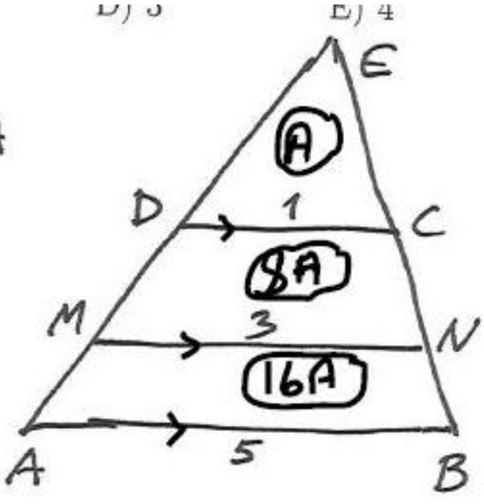
$\{1,2,2^2,2^3,2^4,2^5\}$, $\{3,3\cdot2,3\cdot2^2,3\cdot2^3\}$, $\{5,5\cdot2,5\cdot2^2,5\cdot2^3\}$, $\{7,7\cdot2,7\cdot2^2\}$, ..., $\{19,19\cdot2\}$ kümelerinin her birinden en fazla ikiser, $\{21\},\{23\},\ldots,\{39\}$ kümelerinin her birinden en fazla birer eleman alınabilir. Dolayısıyla $10\cdot2+10=30$'dan fazla eleman alınamaz. Öte yandan $\{11,12,13,\ldots,40\}$ kümesi koşulu sağlar, çünkü bu kümede $a|b|c$ olacak şekilde birbirinden farklı a,b,c sayıları bulunsaydı $b\geq 2a$ ve $c\geq 2b\geq 4a\geq 44$ olurdu.

Cevap: (B)

21.

$A(E\widehat{D}C)=A$ olsun.
$A(E\widehat{A}B)=25A$, $A(ABCD)=24A$
$A(MNCD)=8A$, $A(E\widehat{M}N)=9A$
olacak. O halde
$|MN|=3$

Cevap: (D)



22.

$$4y^2 = 4x^2+4x+1+3 = (2x+1)^2+3$$

$$(2y)^2-(2x+1)^2 = 3 \Rightarrow (2y-2x-1)(2y+2x+1)=3$$

1) $\begin{cases} 2y-2x-1=1 \\ 2y+2x+1=3 \end{cases}$	$\begin{matrix} -1 \\ -3 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 3 \\ 1 \end{matrix}$	$\begin{matrix} -3 \\ -1 \end{matrix}$
$4y=4$	$4y=-4$	$4y=4$	$4y=-4$
$y=1$	$y=-1$	$y=1$	$y=-1$
$x=0$	$x=-1$	$x=-1$	$x=0$

Cevap: (A)

23.

Kuvvet ortalamaları eşitsizliğinden

$$\sqrt[7]{\frac{x^7+y^7+z^7}{3}} \geqslant \sqrt[4]{\frac{x^4+y^4+z^4}{3}} = \sqrt[4]{\frac{48}{3}} = 2$$

O halde $x^7+y^7+z^7 \geqslant 3\cdot 2^7 = 384$

$x=y=z=2$ durumunda eşitlik elde edilir.

Cevap (E)

24.

A'nın yerini $\binom{10}{1}=10$ yolla, 4 tane D'nin yerini $\binom{9}{4}=126$ yolla, ilk C'nin yerini tek yolla, geriye kalan 2C ve 2B'nin yerini de $\frac{4!}{2!\cdot 2!}=6$ yolla belirleriz.

$10\cdot 126\cdot 1\cdot 6=7560$.

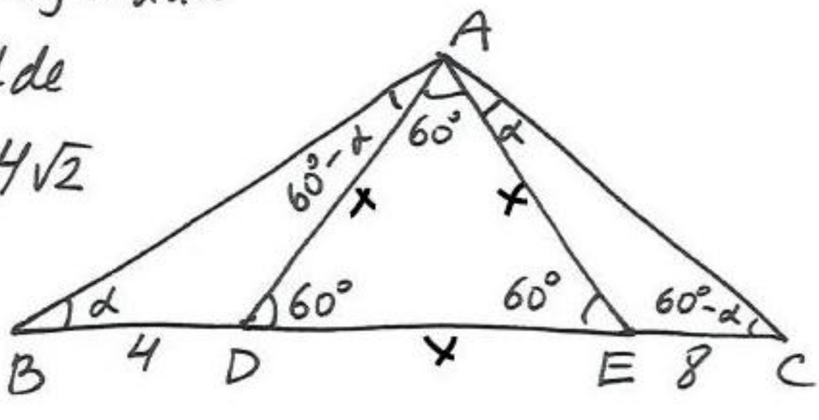
Cevap: (E)

25.

$A\hat{B}D \sim C\hat{A}E$ olduğundan

$\frac{x}{8}=\frac{4}{x}$. O halde

$x^2=32$, yani $x=4\sqrt{2}$



Cevap: (E)

26.

$10^{668} \equiv -1 \pmod{10^{668}+1} \Rightarrow$

$10^{2004}+2 \equiv (-1)^3+2 \equiv 1 \pmod{10^{668}+1} \Rightarrow$

$(10^{2004}+2, 10^{668}+1) = (1, 10^{668}+1) = 1$. O halde

$[10^{2004}+2, 10^{668}+1] = (10^{2004}+2)\cdot(10^{668}+1) =$

$= 10^{2672} + 10^{2004} + 2\cdot 10^{668} + 2 = 10\ldots010\ldots020\ldots02$

$1+1+2+2=6$

Cevap: (B)

27.

$2(\sqrt{k+1}-\sqrt{k}) = \frac{2}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}} < \frac{2}{2\sqrt{k}} < \frac{2}{\sqrt{k}+\sqrt{k-1}} = 2(\sqrt{k}-\sqrt{k-1})$

$x < 2\cdot(\cancel{\sqrt{2}}-\sqrt{1}+\cancel{\sqrt{3}}-\cancel{\sqrt{2}}+\ldots+\sqrt{10000}-\cancel{\sqrt{9999}}) = 198$

$x > 2\cdot(\cancel{\sqrt{3}}-\sqrt{2}+\cancel{\sqrt{4}}-\cancel{\sqrt{3}}+\ldots+\sqrt{10001}-\cancel{\sqrt{10000}}) =$

$= 2\cdot(\sqrt{10001}-\sqrt{2}) > 2\cdot(100-\sqrt{2}) > 197 \Rightarrow$

$[\![x]\!] = 197$

Cevap: (B)

28.

$x=2^{k_1}\cdot5^{m_1}\cdot7^{n_1}$, $y=2^{k_2}\cdot5^{m_2}\cdot7^{n_2}$, $z=2^{k_3}\cdot5^{m_3}\cdot7^{n_3}$ seklinde olmalı. $xyz=2^8\cdot5^4\cdot7^4$ eşitliğinden $k_1+k_2+k_3=8$; $m_1+m_2+m_3=4$; $n_1+n_2+n_3=4$ denklemleri elde edilir. İlk denklemin $\binom{8+3-1}{3-1}=45$, sonrakilerin de $\binom{4+3-1}{3-1}=15$'er çözümleri bulunur. $45\cdot15\cdot15=10125$

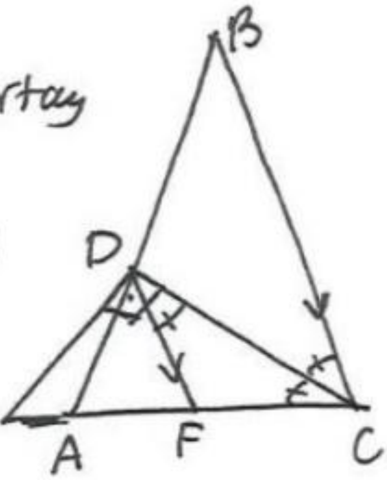
Cevap: (C)

29.

$DF \parallel BC$ çizelim. $A\widehat{D}F \sim A\widehat{B}C \Rightarrow$ $|DF|=|AD|=1$. $DF \parallel BC$ ve CD açıortay olduğundan $m(\widehat{FDC})=m(\widehat{BCD})=$ $=m(\widehat{DCF})$, dolayısıyla $|FC|=|FD|=1$

O halde $[DF]$, $[FC]$ ve $[EF]$, $D\widehat{E}C$ dik üçgeninde muhteşem üçlü oluşturuyor, bu durumda $|EF|=1$, yani $|EC|=|EF|+|FC|=2$

Cevap: (E)



30.

Sayı A^2 olsun. $A^2+1111=B^2$ eşitliğinden

$(B-A)\cdot(B+A)=1111=11\cdot 101$

1) $B-A=1$; $B+A=1111 \Rightarrow 2A=1110 \Rightarrow A=555.$

$A^2=555^2$ dörtbasamaklı olmadığından sağlamaz.

2) $B-A=11$, $B+A=101 \Rightarrow 2A=90 \Rightarrow A=45 \Rightarrow$

$A^2=2025$ sağlar.

Cevap: (B)

31.

$$x_k=\frac{k^2+4k+3}{k^2+4k}=\frac{(k+1)(k+3)}{k(k+4)}$$ olduğundan

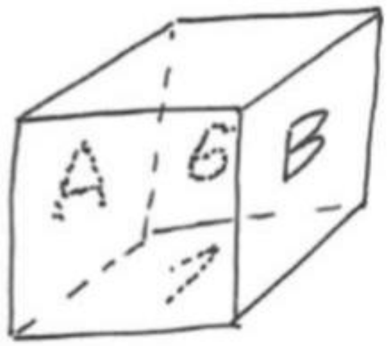
$$P_n=\frac{\cancel{2}\cdot 4}{1\cdot\cancel{5}}\cdot\frac{\cancel{3}\cdot\cancel{5}}{\cancel{2}\cdot\cancel{6}}\cdot\frac{\cancel{4}\cdot\cancel{6}}{\cancel{3}\cdot\cancel{7}}\cdots\frac{\cancel{(n-1)(n+1)}}{\cancel{(n-2)(n+2)}}\cdot\frac{\cancel{n(n+2)}}{\cancel{(n-1)(n+3)}}\cdot\frac{(n+1)\cancel{(n+3)}}{\cancel{n}(n+4)}=$$

$$=\frac{4(n+1)}{n+4}=\frac{4n+4}{n+4}=4-\frac{12}{n+4}.$$ Dolayısıyla $c=4$.

Cevap: (B)

32.

1'in alt yüzde, 6'nın da arka yüzde olduğunu varsayabiliriz. A ve B yüzlerine 2 ve 4 veya 3 ve 5 yazılabilir, bu da $4\cdot 2=8$ yolla olur. Geriye kalan 2 sayı da $2!=2$ yolla yazılabilir.

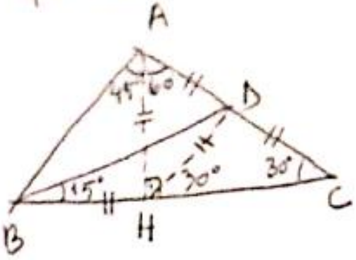


Cevap: (E)

YANKI DENEME ÇÖZÜMLER

1.

Çözüm



A'dan BC'ye inilen dikme ayağı H olsun.

AD = DC = HD (Dik üçgende hipotenüse ait kenarortay)

AH = AD (30°, 60°, 90° üçgeninden)

BH = HD (ikizkenar üçgen) ve AH = BH bulunur.

Buradan $m(B\hat{A}C) = 45° + 60° = 105°$ dir.

2.

$$(n^2+4n-3,\ n^2+3n-5) = (n+2,\ n^2+3n-5) = (n+2,\ n^2+3n-5-(n+2)(n+1))$$

$= (n+2, 7)$ bulunur.

Kesrin sadeleşebilmesi için $7 \mid n+2$ ve $n \equiv -2 \equiv 5 \pmod 7$ olmalı

Verilen şıklardan 2014 bu denkliği sağlar.

3.

$b^3 - a^3 = (b-a)(b^2+ab+a^2)$ eşitliği yardımıyla

paydada verilen ifadenin eşleniğinin $\sqrt[3]{k+1} - \sqrt[3]{k}$ olduğu

görülür. Eşlenik çarpım yapılırsa ifade

$$A = \sum_{k=1}^{26} \frac{\sqrt[3]{k+1} - \sqrt[3]{k}}{(k+1)-k} = \sum_{k=1}^{26} \sqrt[3]{k+1} - \sqrt[3]{k} \text{ olur}$$

$$A = (\cancel{\sqrt[3]{2}} - \sqrt[3]{1}) + (\cancel{\sqrt[3]{3}} - \cancel{\sqrt[3]{2}}) + \;\cdots\cdots\; + (\sqrt[3]{27} - \cancel{\sqrt[3]{26}}) = \sqrt[3]{27} - \sqrt[3]{1}$$

$A = 3 - 1 = 2$ bulunur.

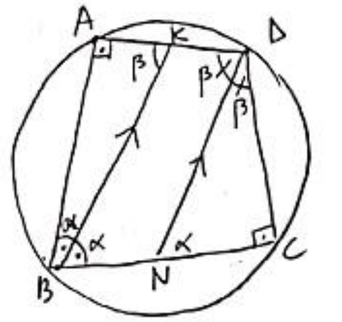
4.

OOA harflerinin yan yana olması isteniyor. Bu harfler kendi aralarında $\frac{3!}{2!}=3$ şekilde sıralanır. Bu üç harfi tek bir eleman gibi düşünürsek elimizde 5 harf olur. 5 farklı harf 5! şekilde sıralanır.

istenilen $5!\cdot 3 = 360$ olarak bulunur.

5.

Çözüm:



$m(A\hat{B}K) = m(K\hat{B}C) = m(D\hat{N}C) = \alpha$ (yöndeş açılar)

$m(C\hat{D}N) = m(N\hat{D}A) = m(B\hat{K}A) = \beta$ (yöndeş açılar)

$m(A\hat{B}C) + m(A\hat{D}C) = 2\alpha + 2\beta = 180°$ (kirişler dörtgeni)

$\alpha + \beta = 90°$ bulunur.

$m(B\hat{A}D) = m(D\hat{C}B) = 90°$ olur. BD kirişinin dik üçgenlerin ortak hipotenüsü olduğu görülürse

$3^2 + 5^2 = 4^2 + |BC|^2$, $|BC| = 3\sqrt{2}$ bulunur.

6.

Denklem mod2'de incelenirse $k \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $x=2k$ ve $x=2k+1$'in çözüm olduğu görülür.

$x=2k$ için

$$(2k)^4-2.(2k)^3+3.(2k)+2 \equiv 0 \pmod 4$$

$$6k+2 \equiv 0 \pmod 4$$

$k \equiv 1 \pmod 4$ ve $k=4m+1$ olur.

$x=2k=2(4m+1)=8m+2$ tekrar denklemde yerine yazılırsa

$$(8m+2)^4-2.(8m+2)^3+3.(8m+2)+2 \equiv 0 \pmod{16}$$

$$24m+8 \equiv 8m+8 \equiv 0 \pmod{16}$$

$$m+1 \equiv 0 \pmod 2$$

$m \equiv 1 \pmod 2$ $m=2n+1$ bulunur.

$$x=2k=8m+2=8.(2n+1)+2=16n+10 \text{ olur}$$

$x=2k+1$ için

$$(2k+1)^4-2.(2k+1)^3+3(2k+1)+2 \equiv 0 \pmod 4$$

$$1-12k-2+6k+3+2 \equiv 0 \pmod 4$$

$$-3k+2 \equiv 0 \pmod 2$$

$k \equiv 0 \pmod 2$ ve $k=2m$ olur.

$x=2k+1=2.(2m)+1=4m+1$ tekrar denklemde yerine yazılırsa

$$(4m+1)^4-2.(4m+1)^3+3(4m+1)+2 \equiv 0 \pmod{16}$$

$$-12m+4 \equiv 0 \pmod{16}$$

$$-3m+1 \equiv 0 \pmod{16}$$

$m \equiv 3 \pmod 4$ ve $m=4n+3$

$$x=4m+1=4(4n+3)+1=16n+13 \text{ olur.}$$

Buradan mod16'da iki çözüm olduğu görülür.

7.

Çözüm: K.O ≥ A.O ≥ G.O ≥ H.O eşitsizliğinin A.O ≥ H.O kullanalım.

$$\frac{x_1+x_2+\dots+x_n}{n} \geq \frac{n}{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\dots+\frac{1}{x_n}}$$

$$\frac{x+\overbrace{\frac{y}{7}+\dots+\frac{y}{7}}^{7\text{ tane}}+\overbrace{\frac{z}{9}+\dots+\frac{z}{9}}^{9\text{ tane}}}{17} \geq \frac{17}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y/7}+\dots+\frac{1}{y/7}+\frac{1}{z/9}+\dots+\frac{1}{z/9}}$$ yazılabilir.

$$\frac{x+y+z}{17} \geq \frac{17}{\frac{1}{x}+\frac{49}{y}+\frac{81}{z}}$$ ve $x+y+z=17$ yazılırsa $\frac{1}{x}+\frac{49}{y}+\frac{81}{z} \geq 17$ bulunur.

İfadenin minimum değeri 17 olarak bulunur. Eşitlik durumunda

$x=\frac{y}{7}=\frac{z}{9}$ olmalıdır. $y=7x$, $z=9x$ bulunur.

$x+y+z=x+7x+9x=17$ ve $x=1$ bulunur.

Minimum değeri veren (x,y,z) üçlüsü $(1,7,9)$ olarak bulunur.

8.

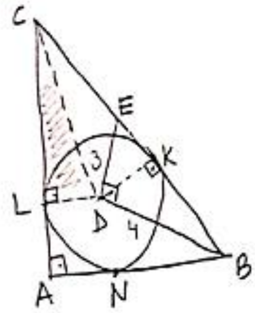
Ali'nin 3 bilyesi Betül'ün 4 bilyesi olsun. Geriye kalan 8 kişiye 73 bilye kalır. En fazla bilyesi olanın en az kaç bilyesi olduğunu bulmak için bilyeleri eşit şekilde paylaştırmaya çalışalım

$a_i \leq 9$ $(1 \leq i \leq 8)$ olmak üzere $a_1 + a_2 + \cdots + a_8 \leq 72$ olur.

$9 + 9 + \cdots + 9 + 10 = 73$ olur. İstenen değer 10'dur.

9.

Çözüm:



$|BE| = 5$ (pisagor)

İç teğet çemberin BC'ye teğet olduğu noktaya K diyelim.

$|DK| = r$ öklit yardımıyla $3.4 = 5.r$, $r = \frac{12}{5}$ bulunur.

$|LN| = |AN| = |DK| = \frac{12}{5}$, $|BK| = |BN| = \frac{16}{5}$ (pisagor)

$|AL| = |AK| = x$ olsun. CAB dik üçgeninde pisagor yapılırsa

$\left(\frac{16}{5} + x\right)^2 = \left(\frac{28}{5}\right)^2 + \left(\frac{12}{5} + x\right)^2$ yazılabilir. Buradan $x = \frac{84}{5}$ olur

ALD üçgeninde pisagordan $\left(\frac{12}{5}\right)^2 + \left(\frac{84}{5}\right)^2 = |CD|^2$ $|CD| = 12\sqrt{2}$

10.

Denklem $(9^x + 2.3^x + 1) - (4^y + 2.2.2^y + 4) = 64$, $(3^x + 1)^2 - (2^y + 2)^2 = 64$

$(3^x + 2^y + 3).(3^x - 2^y - 1) = 64$ şeklinde düzenlenebilir.

Buradan uygun çarpanların 16 4 veya 32 2 olduğu görülür.

$3^x + 2^y + 3 = 16$ ve $3^x - 2^y - 1 = 4$ denklemlerini çözersek $(x,y) = (2,2)$ olur.

$3^x + 2^y + 3 = 32$ ve $3^x - 2^y - 1 = 4$ denklemlerinden tamsayı x, y çözümleri gelmez.

Bu denklemin bir tane $(x,y) = (2,2)$ çözümü vardır.

11.

$\underbrace{11\ldots1}_{3n \text{ tane}} = \frac{10^{3n}-1}{9}$ ve $33\ldots3 = 3\cdot\frac{10^n-1}{9}$ şeklinde yazılabilir.

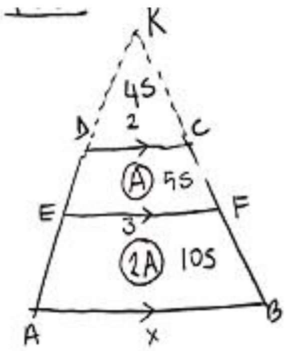
Verilen ifadeyi $a=\sqrt[3]{\frac{10^{3n}-1}{9} - \frac{10^n-1}{9}\cdot 3\cdot 10^n} = \sqrt[3]{\frac{10^{3n}-3\cdot 10^{2n}+3\cdot 10^n-1}{9}}$

$a=\sqrt[3]{\frac{(10^n-1)^3}{9}} = \sqrt[3]{3}\cdot\frac{10^n-1}{3} = \sqrt[3]{3}\cdot\left(\underbrace{33\ldots3}_{n \text{ tane}}\right)$ şeklinde düzenleyebiliriz.

12.

Verilen koşulu $9\geq a_1\geq a_2+2\geq a_3+4\geq a_4+6\geq 6$ şeklinde yazabiliriz. a_i ler tamsayı olduğundan bu da $9\geq a_1 > a_2+1 > a_3+2 > a_4+3 \geq 3$ koşuluna denktir. Bu aralıktaki $3,4,5,6,7,8,9$ sayılarından 4 tanesini $\binom{7}{4}=35$ yolla seçip her seçimi büyükten küçüğe tek türlü sıralayabiliriz. Bu sıralama bize a_1, a_2+1, a_3+2, a_4+3 sayılarını verir. Buradan da yine tek yolla a_1, a_2, a_3 ve a_4 sayılarını elde ederiz. Buradan cevap 35 olur.

13.



$AD \cap BC = K$ olsun. $DC \parallel EF$ olduğundan $KDC \sim KEF$ ve Alanlar oranı $=\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{4}{9}$ olur.

$A(\widehat{KDC})=4S$ Alan$(EFCD)=5S$ ve $A(ABFE)=10S$ bulunur.

$AB \parallel EF$ olduğundan $KEF \sim KAB$ ve Alanlar oranı $=\frac{9S}{19S}=\left(\frac{3}{x}\right)^2$ ise $x=\sqrt{19}$ olur.

14.

$x^{13} \equiv x \pmod{13}$ olduğundan $a^{14}+(a+1)^{14}+(a+2)^{14}+24 \equiv a^2+(a+1)^2+(a+2)^2+24 \pmod{13}$

verilen ifadenin 13 ile tam bölünebilmesi için mod 13'te 0'a denk olmalıdır.

$a^2+(a+1)^2+(a+2)^2+24 \equiv 0 \pmod{13}$ olmalı

$3a^2+6a+3 = 3(a^2+2a+1) = 3(a+1)^2 \equiv 0 \pmod{13}$

$a \equiv -1 \equiv 12 \pmod{13}$ bulunur.

Sağlayan değer E şıkkı 987'dir.

fakat $1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13$ olduğunu biliyoruz. $1001 \equiv 0 \pmod{13}$, $1000 \equiv -1 \pmod{13}$ olur. Aradığımız sayının 1000'den küçük olması istendiği için

$1000-13 = 987$ bulunur.

15.

A) $\frac{1}{4}$ (B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{?}{4}$

Çözüm:

verilen ifade $\frac{1}{2}$ ile çarpılır. $\frac{S}{2}$ ile soruda verilen ifade taraf tarafa toplanır.

$$S = \frac{4}{2^2} - \frac{7}{2^3} + \frac{10}{2^4} - \frac{13}{2^5} + \cdots$$

$$+ \quad \frac{S}{2} = \frac{4}{2^3} - \frac{7}{2^4} + \frac{10}{2^5} - \frac{13}{2^6} + \cdots$$

$$\frac{3S}{2} = 1 - \frac{3}{2^3} + \frac{3}{2^4} - \frac{3}{2^5} + \cdots = 1 - \frac{3}{8}\left(1 + \left(-\frac{1}{2}\right) + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^3 + \cdots\right)$$

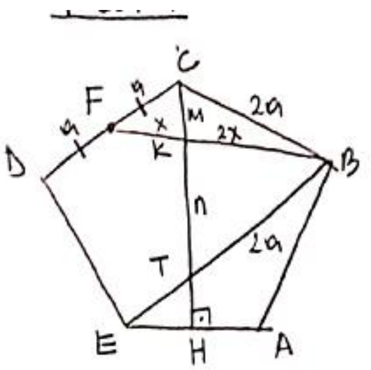
$$\frac{3S}{2} = 1 - \frac{3}{8} \cdot \left(\frac{1}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}\right)$$ ve $S = \frac{1}{2}$ bulunur.

16.

Çözüm:

Toplamda 10 bilyemiz var. Her çocuğun en az bir bilyesi olması için her birine 1'er bilye veririz. Kalan 7 bilyeyi herhangi bir şart olmaksızın 3 çocuğa nasıl paylaştıracağımızı 2 ayraç kullanarak hesaplayabileceğimiz gibi $\binom{7+3-1}{3-1}$ formülüyle de hesaplayabiliriz. Bu da $\binom{9}{2} = 36$ şekilde olur.

17.



CH açıortaydır. $|BC| = 2.|FC|$ ve FCB üçgeninde açıortay oranlısından $|BK| = 2.|FK|$ bulunur. $m(B\hat{E}A) = 36°$, $m(E\hat{T}H) = m(CTB) = 54°$ ve $m(H\hat{C}B) = m(C\hat{T}B)$ olduğundan $|CB| = |BT|$ olur. $|CK| = m$ ve $|KT| = n$ olsun. $\overset{\triangle}{FCB}$ 'ni ve $\overset{\triangle}{CBT}$ 'ninde $m^2 = 2a.a - x.2x$, $(2x)^2 = 2a.2a - m.n$ eşitlikleri kullanılarak $\frac{m}{n} = \frac{1}{2}$ bulunur.

18.

$$n = [\![\sqrt{k}]\!] \Leftrightarrow n \le \sqrt{k} < n+1 \Rightarrow n^2 \le k < n^2+2n+1 \text{ ise}$$

k sayısı $n^2, n^2+1, \dots, n^2+2n$ olmak üzere $2n+1$ tane değer alır.

Toplamı sorulan ifadedeki tamdeğerli sayıları yukarıda elde ettiğimiz duruma göre ayrıştırırsak ilk üç terimin herbiri 1 sonraki beş terimin herbirinin 2 olduğunu görürüz. Bu şekilde devam edersek verilen toplamı

$3.1 + 5.2 + 7.3 + \dots + 19.9 + 13.10$ şeklinde ifade edebiliriz.

Toplamın bir kısmını $\sum_{m=1}^{9}(2m+1).m$ formülü bize verir.

$$\sum_{m=1}^{9}(2m+1).m = 2\sum_{m=1}^{9} m^2 + \sum_{m=1}^{9} m = 2.\frac{9.10.19}{6} + \frac{9.10}{2} = 570 + 45 = 615$$

Sonuç $= 615 + 130 = 745$ bulunur.

19.

A.O $\geq$ G.O eşitsizliği kullanırsak

$$\frac{\frac{1}{2x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{4z}}{3} \geq \sqrt[3]{\frac{1}{2x}\cdot\frac{1}{y}\cdot\frac{1}{4z}} \Rightarrow \frac{3}{10} \geq \frac{3}{10}$$ bulunur. Eşitlik durumunun sağlanması için $\frac{1}{2x} = \frac{1}{y} = \frac{1}{4z}$ olmalıdır. Buradan $x=5$, $y=10$ ve $z=\frac{5}{2}$ bulunur.

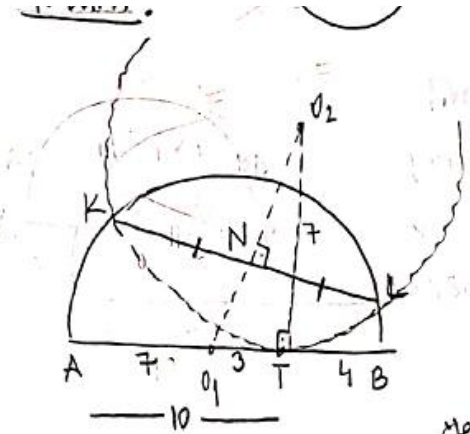
$$x^2+y^2+4z^2 = 5^2+10^2+4\left(\frac{5}{2}\right)^2 = 150 \text{ olur.}$$

20.

sıfırdan farklı komşu iki rakam birer azaltılırsa sayının değeri (11, 110, 1100, ...) azalır. Bu da bize sayının değerinin mod 11' de değişmediğini gösterir

$123 \ldots 9 \equiv 5 \pmod{11}$ den elde edilen sayının rakamları toplamı da 5 dur. Örnek olarak 123456789 sayısının ilk iki basamağına bu işlemi 8 defa sonra 3. ve 4. basamaklara 6 defa, 5. ve 6 basamaklara 4 defa, 7. ve 8. basamaklara 2 defa uygulanırsa 101010101 sayısı elde edilir. Bu sayıyı oluşturan rakamların toplamı da 5 olur

21.



Simetrik olan yay çembere tamamlanırsa bu çember AB çaplı yarım çemberle eş çember olurlar. KL'de bu çemberlerin ortak kirişidir. Merkezleri birleştiren doğru parçası KL'ye diktir. $O_1O_2 \perp KL$, $O_1O_2 \cap KL = N$ $KN = NL$ ve $O_1N = O_2N$ olur. $O_1\overset{\triangle}{T}O_2$'de pisagor yapılırsa $|O_1O_2| = \sqrt{58}$, $|O_1N| = \frac{\sqrt{58}}{2}$ bulunur. O_1NL üçgeninde pisagor yapılırsa $|NL| = \sqrt{\frac{69}{2}}$ ve $|KL| = \sqrt{138}$ olur.

22.

ilk n asal sayı dediği için

$P_1=2$, $P_2=3$, $P_3=5$ .... yazılabilir.

$P_1^2 \equiv 4 \pmod{12}$, $P_2^2 \equiv 9 \pmod{12}$ olur. 3'den büyük asal sayılar $6k\mp1$ formunda yazılabildiği için

$(6k\pm1)^2 \equiv 1 \pmod{12}$ yani $n\geqslant 3$ için $P_n^2 \equiv 1 \pmod{12}$

$4+9+(n-2).1 \equiv 0 \pmod{12}$, $n \equiv 1 \pmod{12}$ ve $n=13$ bulunur.

23.

$$A=(1+x_1^2)(1+x_2^2)(1+x_3^2)=1+(x_1^2+x_2^2+x_3^2)+(x_1^2x_2^2+x_1^2x_3^2+x_2^2x_3^2)+(x_1^2x_2^2x_3^2)$$

Vieta teoreminden

$x_1+x_2+x_3=-2$, $x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3=+3$, $x_1.x_2.x_3=-1$ olur.

istenen ifade düzenlenirse

$$A=1+(\underbrace{x_1+x_2+x_3}_{-2})^2-2(\underbrace{x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3}_{+3})+(\underbrace{x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3}_{+3})^2-2.\underbrace{x_1x_2x_3}_{-1}(\underbrace{x_1+x_2+x_3}_{-2})+(\underbrace{x_1x_2x_3}_{-1})^2$$

$A=1+(-2)^2-2.3+3^2-2.(-1).(-2)+1$

$A=5$ bulunur.

24.

Bu dizide 1 basamaklı sayılar 4 tane, 2 basamaklı sayılar 20 tane, 3 basamaklı sayılar 100 adet, 4 basamaklı sayılar 500 adet, 5 basamaklı sayıların 2,4 ve 6 ile başlayanları 1875 tanedir. Sıra 8 ile başlayanlara gelince küçükten büyüğe sıralama yapıldığı için binler basamağına 0 gelir. Yüzler basamağı 0,2 ve 4 ile başlayanlar 75 tanedir. Sıra yüzler basamağı 6 olanlara gelir. Bunlarda

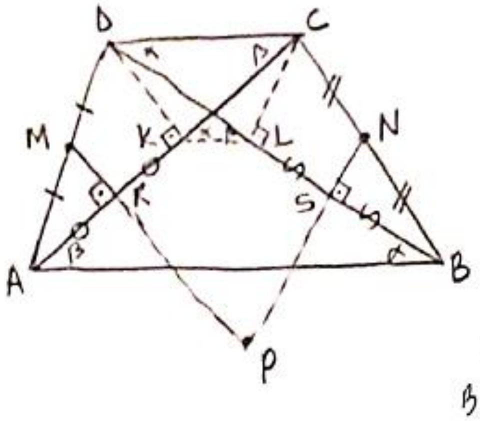
80600, 80602, 80604, 80606, 80608, 80620, 80622, 80624 istenen sayıya kadar 8 tanedir.

80624 sayısı $4+20+100+500+1875+75+8=2582$. sıradadır.

Çözüm 2. Bu dizide 2'lerin yerine 1'ler, 4'lerin yerine 2'ler, 6'ların yerine 3'ler ve 8'lerin yerine 4'ler yazarsak

1, 2, 3, 4, 10, 11, 12, 13, 14, 20, ... 40312 dizisini elde ederiz. Bunun da 5 tabanında yazılmış $(1)_5$'den $(40312)_5$'ye kadar olan sayıların dizisi olduğu kolayca görülür. O halde dizideki terim sayısı da $4\cdot 5^4+0\cdot 5^3+3\cdot 5^2+1\cdot 5+2=2582$ olur.

25.



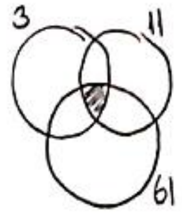
D ve C noktalarından AC ve BD köşegenlerine indirilen dikmeler K ve L olsun. MP // DK, CL // NP ve AR = RK, BS = SL bulunur. KLCD kirişler dörtgenidir. ($m(D\hat{K}C)=m(D\hat{L}C)$)
$m(C\hat{D}B)=m(D\hat{B}A)$ ve $m(L\hat{B}A)+m(L\hat{K}A)=180°$ olduğundan ABLK kirişler dörtgenidir.
BL ve AK kirişlerinin kenar orta dikmelerinin kesim noktası P, ABLK'nın çevrel çemberinin merkezidir. $|AP|=|PB|$ aynı zamanda yarıçap olur.

$$\frac{|AP|}{|PB|}=1$$

26.

$a^{60}-1\equiv 0 \pmod{2013}$ eşitliğini sağlayan a sayılarını arıyoruz.

$2013=3\cdot 11\cdot 61$ olduğundan $a^{60}\equiv 1 \pmod{3}$, $a^{60}\equiv 1 \pmod{11}$ ve $a^{60}\equiv 1 \pmod{61}$ denkliklerini sağlayan a sayıları $(a,3)=(a,11)=(a,61)=1$ olduğundan



Taralı bölgenin eleman sayısı

$671+183+33-61-3-11+1=1200$ olarak bulunur.

27.

$$S=\frac{1}{1}\cdot\frac{20!}{0!.20!}+\frac{1}{2}\cdot\frac{20!}{1!.19!}+\frac{1}{3}\cdot\frac{20!}{2!.18!}+\dots+\frac{1}{21}\cdot\frac{20!}{20!.0!}$$

S toplamında paydalar düzenlenirse

$$S=\frac{20!}{1!.20!}+\frac{20!}{2!.19!}+\frac{20!}{3!.18!}+\dots+\frac{20!}{21!.0!}$$ Bu toplam 21 ile çarpılırsa

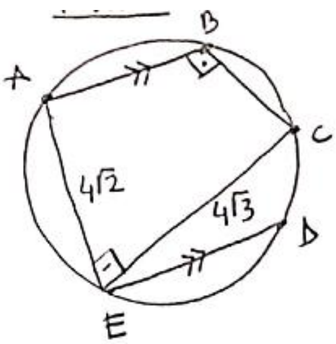
$$21S=\frac{21!}{1!.20!}+\frac{21!}{2!.19!}+\frac{21!}{3!.18!}+\dots+\frac{21!}{21!.0!}$$ her iki tarafa $\frac{21!}{0!.21!}$ ilave edilirse $21S+1=2^{21}$ bulunur

28.

Herhangi ikisinin farkı 9 olan elemanları gruplayalım

$\{1,10\},\{2,11\},\dots\{9,18\},\{19,28\},\dots\{27,36\},\dots\{99,108\}$ olmak üzere 54 grup bulunur. Bu grupların herbirinden en fazla bir eleman seçebiliriz. Ayrıca bu gruplamaya dahil olmayan 109, 110 ve 111 sayıları vardır. Bu durumda istenen şartlarda $54+3=57$ sayı seçilebilir.

29.



$AB // ED$ oldupundan $m(\widehat{AE}) = m(\widehat{BCD})$ ve $|AE| = |BD|$ olur. (Paralel kirişlerin arasında kalan yayların ölçüleri eşittir. Eşit kirişler eşit yayları ayırır)

ABCE kirişler dörtgeni oldupundan $m(A\hat{E}C) = 90°$ ve AC çap olur. AEC dik üçgeninde pisagordan $|AC| = 4\sqrt{5}$ ve $r = 2\sqrt{5}$ bulunur.

30.

Denklemi düzenlersek $(3x-7)\cdot(2y+5) = 10$ olur, $3x-7 \equiv -1 \pmod 3$ ve $2y+5 \equiv 1 \pmod 2$ olduğunu dikkate alırsak $3x-7=-10$ ve $2y+5=-1$ den $(x,y)=(-1,-3)$
$3x-7=2$ ve $2y+5=5$ den $(x,y)=(3,0)$ olarak çözüm ikilileri 2 tane bulunur.

31.

$X_{n+p} = X_n$ eşitliği için $\dfrac{(n+p)\cdot(n+p+2)}{3} = \dfrac{n(n+2)}{3} \pmod{10}$ olmalıdır. $\cancel{n^2}+2pn+\cancel{2n}+p^2+2p \equiv \cancel{n^2}+\cancel{2n} \pmod{30}$ olur. (moda dikkat)

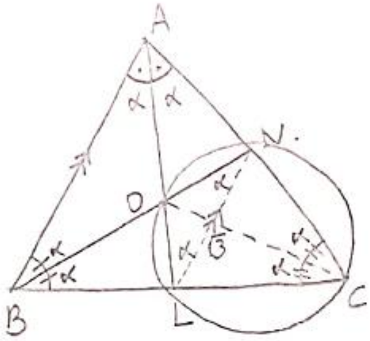
$2pn+p^2+2p \equiv p(2n+p+2) \equiv 0 \pmod{30}$ buradan $p=30$ bulunur.

32.

Bu toplam en az $1+1=2$ ve en fazla $1+1+1+1+5+5+5+20+20+45=104$ olabilir. Fakat bu sayılardan en az ikisinin toplamı 5 ve 20 olamaz. $[2,104]$ aralığındaki 103 tamsayıdan ikisi $\{5,20\}$ hariç bu sayılardan en az ikisinin toplamı şeklinde gösterilebileceği kolayca görülür.

SUDE DENEME ÇÖZÜMLER

1.



O noktası ABC üçgeninin iç teğet çemberinin merkezi olur. CO, $\widehat{ABC}$ nın açıortayı olur.

$AB // NL \Rightarrow m(\widehat{BAL}) = m(\widehat{ALN})$ (iç ters açılar)

$m(\widehat{ALN}) = m(\widehat{OCN})$ (aynı yayı gören çevre açılar)

aynı şekilde $m(\widehat{ABN}) = m(\widehat{BNL}) = m(\widehat{OCL})$ bulunur.

$m(\widehat{ABC}) = m(\widehat{BAC}) = m(\widehat{ACB})$ olur. ABC eşkenar üçgendir.

LON üçgeni $30°, 30°, 120°$ üçgeni olur.

$|OL| = |ON| = 1$ ve $|OL| + |ON| = 2$ bulunur.

2.

Öklit algoritmasından

$obeb(12n+22, 4n+10) = 2 \cdot obeb(4, 2n+5) = 2 \cdot 1 = 2$

çünkü $n \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere $2n+5$ tek sayıdır.

3.

Çözüm:

$x^2+1 = x \Rightarrow x^2-x+1=0$ ve eşitliğin her iki tarafı $(x+1)$ ile çarpılırsa

$(x+1) \cdot (x^2-x+1) = 0 \cdot (x+1) \Rightarrow x^3+1=0$ ve $x^3=-1$ bulunur.

istenen ifade $2(x^3)^5 - \dfrac{7}{(x^3)^3}$ şeklinde düzenlenerek $x^3=-1$

yazılırsa $2 \cdot (-1)^5 - \dfrac{7}{(-1)^3} = -2+7 = 5$ bulunur.

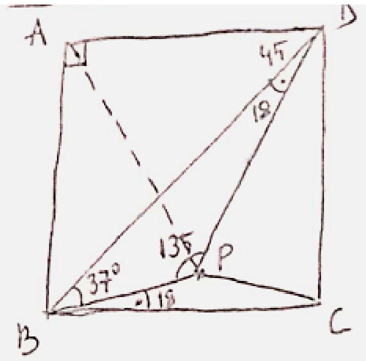
4.

$(+1)\cdot(+1)\cdot\ldots(+1)\cdot(-1)\cdot(-1)\ldots\cdot(-1)=-1$ olması için K tane $(+1)$ ve L tane (-1) gerekli olsun. L tek sayı olmalı. L tek sayı ise $x\in Z^+$ olmak üzere $L=2x+1$ şeklinde yazılabilir.

Toplamlarının $+1$ olması için $K=L+1$ olmalı $K=2x+1+1=2x+2$ olur

$n=K+L=2x+2+2x+1=4x+3$ bulunur. Verilen sayıların içinde bu forma uyan sadece 2011 vardır.

5.



$m(D\hat{B}P)=45^\circ-18^\circ=37^\circ$

$m(B\hat{P}D)=180-(37+18)=135^\circ$

ABPD dörtgeninde $|AB|=|AD|$ ve $m(B\hat{A}D)+2m(B\hat{P}D)=360^\circ$ olduğundan, A merkezli ve B, P, D noktalarından geçen çember çizilebilir.

Bu durumda $|AB|=|AP|=|AD|$ olur

$m(A\hat{D}P)=m(A\hat{P}D)=63^\circ$ ve $m(P\hat{A}D)=180-2\cdot63=54^\circ$ bulunur.

6.

Denklem $3x+12xy=12+8y \Rightarrow 3x(1+4y)=12+8y \Rightarrow 3x=\dfrac{8y+12}{4y+1}$

ve $3x=2+\dfrac{10}{4y+1}$ şeklinde düzenlenirse $2+\dfrac{10}{4y+1}$ ifadenin 3'ün katı olması gerektiği görülür. Buradan $y=0$ ve $x=4$ olarak bulunur.

Denklemi sağlayan bir tane $(x,y)=(4,0)$ ikilisi vardır.

7.

$\frac{3}{x}$, $\frac{8}{y}$ ve $\frac{1}{3z}$ terimlerine AGO uygulanırsa

$$\frac{\frac{3}{x}+\frac{8}{y}+\frac{1}{3z}}{3} \geqslant \sqrt[3]{\frac{3}{x}\cdot\frac{8}{y}\cdot\frac{1}{3z}}$$ olur.

$\frac{2}{3} \geqslant \frac{2}{\sqrt[3]{xyz}}$ buradan $\sqrt[3]{xyz} \geqslant 3$ ve $xyz \geqslant 27$ bulunur.

8.

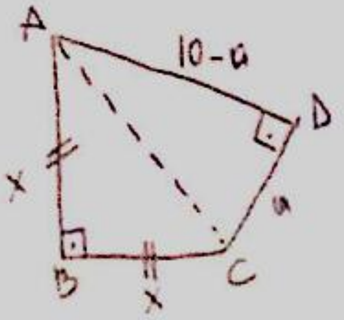
Ünsüzler alfabetik sıraya göre C, K, M, P şeklinde tek türlü dizilebilir.

_ C _ K _ M _ P _

ünlü harfler _ ile gösterilen yerlere gelirlerse istenen durum gerçekleşmiş olur. Önce $\binom{5}{3}$ sesli harfler için yer seçimi yapılır ve $\frac{3!}{2!}$ ile bu harfler kendi aralarında sıralanır. (tekrarlı permutasyon)

Sonuç $\binom{5}{3}\cdot\frac{3!}{2!}=30$ bulunur

9.



$|AB|=|BC|=x$, $|CD|=a$ olsun. $|AD|=10-a$ olur

AC dik üçgenlerin ortak hipotenüsüdür

$$x^2+x^2=a^2+(10-a)^2$$

$$2x^2=a^2+100+a^2-20a$$

$$x^2=a^2-10a+50 \text{ bulunur}$$

$$A(ABCD)=A(ABC)+A(ADC)=\frac{x^2}{2}+\frac{a(10-a)}{2}=25 \text{ olur}$$

10.

$3^3=27$ olduğundan 11^{196}'nın 27 ile bölümünden kalanı bulmamız gerekiyor

$\phi(27)=3^3-3^2=18$ ve $196=18\cdot 10+16$ olduğundan

$11^{196}\equiv 11^{16}\equiv 121^8\equiv 13^8\equiv 169^4\equiv 7^4\equiv 49^2\equiv(-5)^2\equiv 25 \pmod{27}$ bulunur

$(25)_{10}=(221)_3$ olur

11.

Çözüm:

Çarpma işlemi yapılırsa $f(x,y)=\frac{75xy}{4}+\frac{48}{xy}+61$ bulunur.

ilk iki terime AGO uygulanırsa

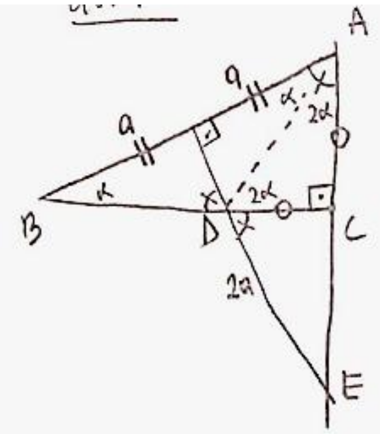
$$\frac{\frac{75xy}{4}+\frac{48}{xy}}{2}\geq\sqrt{\frac{75xy}{4}\cdot\frac{48}{x\cdot y}}$$

$$\frac{75xy}{4}+\frac{48}{xy}\geq 60 \text{ ve } \frac{75xy}{4}+\frac{48}{xy}+61\geq 121 \text{ bulunur}$$

12.

(4,2)

13.



$m(A\hat{B}C) = m(C\hat{E}D)$ ve $m(E\hat{D}C) = m(B\hat{A}C)$ olduğundan

$\overset{\triangle}{ACB} \sim \overset{\triangle}{DCE}$ olur. Ayrıca $|AB| = |DE|$

olduğundan $\overset{\triangle}{ACB} = \overset{\triangle}{DCE}$ olur. $|AC| = |DC|$ 'dir.

$m(A\hat{B}C) = m(B\hat{A}D) = \alpha$, $m(A\hat{D}C) = 2\alpha$ (dış açı)

$m(A\hat{D}C) = m(D\hat{A}C) = 2\alpha$ $(|AC| = |DC|)$

$\overset{\triangle}{ABC}$ ninden $4\alpha = 90^\circ$, $\alpha = 22{,}5^\circ$ ve $m(B\hat{A}C) = 3\alpha = 67{,}5^\circ$ bulunur.

14.

$3x \equiv 1 \pmod 4$ $x \equiv 3 \pmod 4$ ve $x = 4k+3$ $(k \in \mathbb{Z})$ olur.

$4x \equiv 1 \pmod 5$ $x \equiv 4 \pmod 5$ ve $x = 4k+3$ yazılırsa $4k+3 \equiv 4 \pmod 5$

$4k \equiv 1 \pmod 5$ $k \equiv 4 \pmod 5$ ve $k = 5m+4$ bulunur.

$x = 4k+3 = 4.(5m+4)+3 = 20m+19$ son denklemde yerine yazılırsa

$x \equiv 1 \pmod 6$, $20m+19 \equiv 1 \pmod 6$, $2m \equiv 0 \pmod 6$ ve $m \equiv 0 \pmod 3$

$m = 3n$ bulunur.

$x = 20m+19 = 20.3n+19 = 60n+19$ olur.

$0 \leq 60.n+19 < 500$ eşitsizliğini sağlayan 9 tane n

tamsayı değeri vardır.

15.

Çözüm

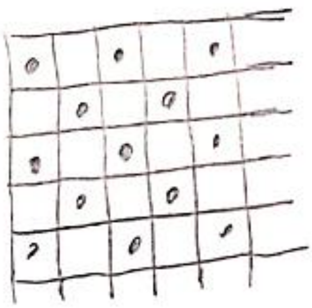
ifade $\prod_{k=1}^{n} 1+\frac{2}{k^2+3k}$ şeklinde yazılabilir.

$1+\frac{2}{k^2+3k} = \frac{k^2+3k+2}{k^2+3k} = \frac{(k+2)(k+1)}{k(k+3)}$ şeklinde yazılabilir

$\prod_{k=1}^{n} \frac{(k+1)(k+2)}{k\cdot(k+3)} = \frac{\cancel{2}\cdot 3}{1\cdot \cancel{4}}\cdot\frac{\cancel{3}\cdot \cancel{4}}{\cancel{2}\cdot \cancel{5}}\cdot\frac{4\cdot \cancel{5}}{\cancel{3}\cdot 6}\cdots\cdots\frac{(n+1)\cdot(n+\cancel{2})}{\cancel{n}\cdot(n+3)} = \frac{3\cdot(n+1)}{n+3}$ bulunur.

16.

Çözüm:

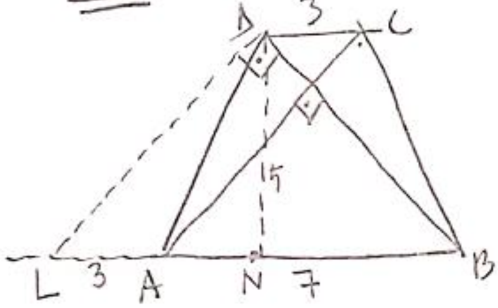


tek numaralı satırlarda 6 taş ve çift numaralı satırlarda 5'er taş olur. 6 tane tek numaralı satır ve 5 tane çift numaralı satır olduğundan $6\cdot 6+5\cdot 5=61$ taş yerleştirilebilir.

Daha fazla taş yerleştirilemeyeceğini göstermek için tahtayı 60 tane 1x2 ve 1 tane 1x1 boyutlu dikdörtgenlere bölelim. Bu 61 tane dikdörtgenin her birinde en fazla 1 taş bulunabileceği için taş sayısı 61'i geçemez.

17.

Çözüm



Yamuğun D köşesinden AC ye paralel bir doğru çizelim ve bunun AB ile kesim noktasına L diyelim.

LACD paralelkenar olur. $m(L\hat{D}B) = 90°$ ve $|LA| = |DC| = 3$ bulunur. LDB üçgeninde hipotenüs $|LB| = 10$ ve $|DN| = 5$ olduğundan hipotenüse ait kenarortaydan $|LN| = |NB| = |DN| = 5$ ve $|AN| = 2$ olur.

18.

Verilen denklemi mod4'te incelersek

$3x^2 \equiv m \pmod 4$ olur. mod4'te bir sayının karesinin 0 veya 1 olduğunu biliyoruz.

$m \equiv 0 \pmod 4$ veya $m \equiv 1 \pmod 4$ olmalıdır.

Verilen şıklarda bu şartlardan birini söyleyen sadece 2020 vardır.

$(x, y) = (14, 9)$ alınarak $7 \cdot 14^2 + 8 \cdot 9^2 = 2020$ $(14, 9)$ ikilisinin $m = 2020$ için çözüm olduğu görülür.

19.

Çözüm:

$\binom{n}{r} = \dfrac{n!}{r!\,(n-r)!}$ formülü kullanılarak

$$S = \frac{1}{11}\cdot\frac{11!}{1!.10!} + \frac{2}{11}\cdot\frac{11!}{2!\,9!} + \cdots + \frac{11}{11}\cdot\frac{11!}{11!.0!}$$

$$S = \frac{10!}{0!.10!} + \frac{10!}{1!.9!} + \cdots + \frac{10!}{10!.0!}$$

$S = \binom{10}{0} + \binom{10}{1} + \cdots + \binom{10}{10} = 2^{10}$ bulunur.

20.

Çözüm

Verilen eşitsizlikleri $x_1+5 \geqslant 0$, $x_2+4 \geqslant 0$, --- $x_{12}-6 \geqslant 0$ şeklinde düzenleyelim ve yeni değişkenler atayalım.

$y_1 = x_1+5 \geqslant 0$, $y_2 = x_2+4 \geqslant 0$, ---, $y_{12} = x_{12}-6 \geqslant 0$ eşitsizlikleri taraf tarafa toplanırsa

$y_1+y_2+\cdots+y_{12} = x_1+x_2+\cdots+x_{12}-6 \geqslant 0$ bulunur.

$x_1+x_2+\cdots+x_{12}=9$ yerine yazılırsa $y_1+y_2+\cdots+y_{12}=3$ bulunur.

Bu eşitlikteki her bir y değeri bir x değerine karşılık gelir.

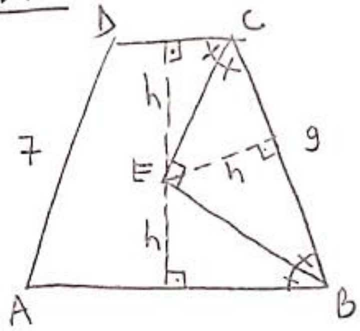
$y_1+y_2+\cdots+y_{12}=3$ eşitliğinde $\binom{3+12-1}{12-1} = 364$ tane

$(y_1, y_2, \ldots, y_{12})$ 12'lise ve buna karşılık 364 tane $(x_1, x_2, \ldots x_{12})$

12'lisi bulunur.

21.

Çözüm



$m(\hat{B}) + m(\hat{C}) = 180^\circ$ olduğundan $m(C\hat{E}B) = 90^\circ$ olur.
Açıortaydan açının kollarına çizilen dikmeler eşit olduğundan CEB üçgeninin hipotenüse ait yüksekliğine h dersek yamuğun yüksekliği 2h olur.

$$\frac{A(B\hat{E}C)}{A(ABCD)} = \frac{\frac{9h}{2}}{\frac{14\cdot 2h}{2}} = \frac{9}{28}$$ bulunur.

22.

Çözüm:

İfadeyi düzenlersek $x\cdot y = 1997^{2012}\cdot(x+y)$, $x\cdot y - 1997^{2012}\cdot x = 1997^{2012}\cdot y$

$x\left(y-1997^{2012}\right) = 1997^{2012}\cdot y$ ve $x = \frac{1997^{2012}\cdot y}{y-1997^{2012}}$ bulunur.

pay kısmını düzenlersek,

$$x = \frac{1997^{2012}\cdot x - 1997^{4024} + 1997^{4024}}{y-1997^{2012}} = 1997^{2012} + \frac{1997^{4024}}{y-1997^{2012}}$$ olur.

$x \in Z^+$ olması için $y-1997^{2012} \mid 1997^{4024}$ olmalı

bölme işleminin tam olması için $y = 1997^{2012} + 1997^k$ $(k=0,1,\dots 4024)$ formunda olmalı. (x,y) tamsayı ikililerinin sayısı 4025 tane bulunur.

23.

Her $k \geq 2$ tam sayısı için

$$2\left(\sqrt{k+1}-\sqrt{k}\right) = \frac{2\cdot\left(\sqrt{k+1}-\sqrt{k}\right)}{k+1-k} = \frac{2}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}} < \frac{1}{\sqrt{k}} = \frac{2}{\sqrt{k}+\sqrt{k}} < \frac{2}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}} =$$

$$= \frac{2\left(\sqrt{k}-\sqrt{k-1}\right)}{k-(k-1)} = 2\left(\sqrt{k}-\sqrt{k-1}\right)$$ olur. Dolayısıyla

$$x > 2\cdot\left((\sqrt{3}-\sqrt{2})+(\sqrt{4}-\sqrt{3})+(\sqrt{5}-\sqrt{4})+\cdots+(\sqrt{22500}-\sqrt{22499})\right) = 2\cdot(150-\sqrt{2}) > 297$$ ve

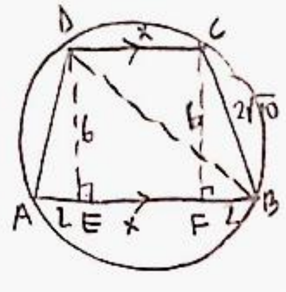
$$x < 2\cdot\left((\sqrt{2}-1)+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+(\sqrt{4}-\sqrt{3})+\cdots+(\sqrt{22499}-\sqrt{22498})\right) = 2\left(\sqrt{22499}-1\right) < 2\cdot(150-1) = 298$$ olur.

$297 < x < 298$ dir. O halde $[\![x]\!] = 297$ bulunur.

24.

$\{1.2^4, 1.2^5, 1.2^6\}$ kümesindeki herhangi iki sayıdan biri diğerini böldüğü için bu kümeden en fazla bir sayı alınabilir. Benzer şekilde $\{3.2^2, 3.2^3, 3.2^4, 3.2^5\}$, $\{5.2^1, 5.2^2, 5.2^3, 5.2^4\}$, ..., $\{49.2^0, 49.2^1\}$, $\{51.2^0\}$ ... $\{99.2^0\}$ kümelerinden en fazla birer sayı alınabilir. Bu kümelerin sayısı 100'den küçük olan tek sayıların sayısı kadar yani 50 tanedir. Dolayısıyla 50'den fazla sayı alamayız. 50 elemanlı kümeye örnek olarak $\{50, 51, 52, \ldots, 99\}$ kümesi verilebilir.

25.



Çemberde paralel kirişlerin arasında kalan yayların ölçüleri eşittir. $DC // AB$ olduğundan $m(\widehat{AD}) = m(\widehat{BC})$ ve $|AD| = |BC| = 2\sqrt{10}$ bulunur. D ve C'den inilen dikme ayakları E ve F olsun. $|AE| = |FB| = 2$ (pisagor) olur. $|EF| = |DC| = x$ olsun

$A(ABCD) = \frac{(4+x+x).6}{2} = 72 \Rightarrow x = 10$ bulunur. DEB dik üçgeninde pisagordan $|BD| = 6\sqrt{5}$ ve $A(\overset{\triangle}{ABD}) = 42$ olur. $\frac{A(DCB)}{A(DAB)} = \frac{10}{14} = \frac{5}{7}$ ve $A(\widehat{DAB}) = 42$ olur.

yamuğun çevrel çemberi aynı zamanda DAB üçgenininde çevrel çemberidir.

$Alan(DAB) = \frac{a.b.c}{4R}$ kullanılırsa $42 = \frac{2\sqrt{10}.14.6\sqrt{5}}{4R}$

$R = 5\sqrt{2}$ bulunur.

26.

$25 = 5^2$ olduğundan önce

$x^3 + 3x^2 + 1 \equiv 0 \pmod 5$ denklemini görelim

$x = 0, \pm 1, \pm 2$ sayıları denklemde yerine

yazılırsa $x \equiv 1 \pmod 5$ ve $x \equiv 3 \pmod 5$

çözüm olduğu görülür.

$x = 5k+1$ için

$(5k+1)^3 + 3(5k+1)^2 + 1 \equiv 0 \pmod{25}$

$3.5k + 1 + 30k + 3 + 1 \equiv 0 \pmod{25}$

$20k + 5 \equiv 0 \pmod{25}$ ve $4k+1 \equiv 0 \pmod 5$ $k \equiv 1 \pmod 5$ ve $x = 5k+1 = 5(5n+1)+1$

$= 25n + 6$ olur.

$x = 5k+3$ için

$(5k+3)^3 + 3.(5k+3)^2 + 1 \equiv 0 \pmod{25}$

$3.5k.9 + 27 + 90k + 27 + 1 \equiv 0 \pmod{25}$

$5 \equiv 0 \pmod{25}$ bulunur buradan çözüm gelmez

Tek çözüm $x \equiv 25n + 6$ bulunur. İstenen aralıkta sadece 6 vardır.

27.

Çözüm: verilen ifadenin 2 katı alınırsa

$$2A = \frac{4}{2} - \frac{7}{2^2} + \frac{10}{2^3} - \frac{13}{2^4} + \dots - \frac{31}{2^{10}} + \frac{34}{2^{11}}$$

$$A = \frac{4}{2^2} - \frac{7}{2^3} + \frac{10}{2^4} - \frac{13}{2^5} + \dots - \frac{31}{2^{11}} + \frac{34}{2^{12}}$$ ifadeleri

taraf tarafa toplanırsa

$$3A = 2 - \frac{3}{2^2} + \frac{3}{2^3} - \frac{3}{2^4} + \dots + \frac{3}{2^{11}} + \frac{34}{2^{12}}$$ ilk terim ve

son terim hariç ortada kalan ifadelerin toplamı seri toplam formülü kullanılarak bulunabilir

$$3A = 2 - 3\left[\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{3}\right)^3 + \dots + \left(\frac{-1}{11}\right)^{11}\right] + \frac{34}{2^{12}}$$

$$3A = 2 - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2^{10}}\right) + \frac{34}{2^{12}} = \frac{3}{2} + \frac{1}{2^{11}} + \frac{34}{2^{12}} = \frac{3}{2} + \frac{36}{2^{12}} = \frac{3}{2} + \frac{9}{2^{10}}$$ olur.

$3A = \frac{3}{2} + \frac{9}{2^{10}}$ ise $A = \frac{1}{2} + \frac{3}{2^{10}}$ olur. Buradan $2^{10} \cdot \left(A - \frac{1}{2}\right) = 3$ bulunur.

28.

Ali'nin 6 basamaklı merdiveni çıkarken atması gereken adım sayıları

$1+1+1+1+1+1 \longrightarrow$ 1 durum

$1+1+1+1+2 \longrightarrow$ 5 durum

$1+1+2+2 \longrightarrow$ 6 durum

$2+2+2 \longrightarrow$ 1 durum

$1+1+1+3 \longrightarrow$ 4 durum

$3+3 \longrightarrow$ 1 durum

$2+1+3 \longrightarrow$ 6 durum

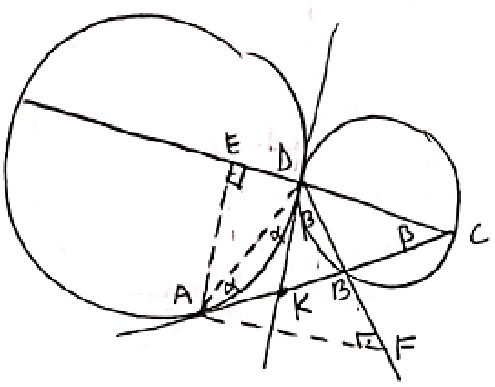
toplam durum sayısı 24 olarak bulunur.

İndirgeme kullanılarak çözüm şöyle yapılabilir

$a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 4$ dolayısıyla $a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3}$ olur.

Buradan $a_4 = 7$, $a_5 = 13$ ve $a_6 = 24$ bulunur.

29.



D noktasından geçen ve her iki çemberede teğet olan d doğrusunu çizelim doğrunun AB'yi kestiği nokta K olsun.

$|AK|=|KD|$ olduğundan $m(D\hat{A}K)=m(ADK)=\alpha$ olur.

$m(K\hat{D}B)=m(D\hat{C}A)=\beta$ (aynı yayı gören çevre açıyla teğet kiriş açı)

$m(E\hat{D}A)=\alpha+\beta$ (dış açı) olur.

Buradan DA'nın $E\hat{D}F$'nin açıortayı olduğu görülür.

Açıortaydan açının kollarına inilen dikmeler eşit olduğundan $|AE|=|AF|$ ve $\frac{|AE|}{|AF|}=1$ olur.

30.

mod3'te bir sayının karesi 0 veya 1 olur.

(x^2, y^2, z^2) üçlüsü için $(0,0,0)$, $(1,1,0)$ ve $(1,0,1)$ durumları çözümdür.

$x^2 \equiv 0 \pmod 3$ $x=\{3,6,9,12,15\}$ 5 çözüm vardır.

$x^2 \equiv 1 \pmod 3$ $x=\{1,2,4,5,7,8,10,11,13,14,16,17\}$ 12 çözüm vardır.

$(0,0,0)$ durumu $5.5.5=125$ durum

$(1,1,0)$ durumu $12.12.5=720$ durum

$(1,0,1)$ durumu $12.5.12=720$ durum

olmak üzere toplamda 1565 tane (x,y,z) tamsayı üçlüsü vardır.

31.

<u>Çözüm:</u> x_n dizisi artandır

$x_n < \sqrt[3]{120+\sqrt[3]{120+\dots+\sqrt[3]{120}}} = x$ alalım. Her iki tarafın üçüncü kuvveti alınıp x tekrardan yerine yazılırsa $120+x=x^3$ denklemi elde edilir.

$x^3-x-120=0$ denkleminde 120'nin çarpanları tek olarak denenirse $x=5$'in sağladığı görülür. $\lim x_n = x$ olduğundan $r=x=5$ bulunur.

32.

<u>Çözüm:</u>

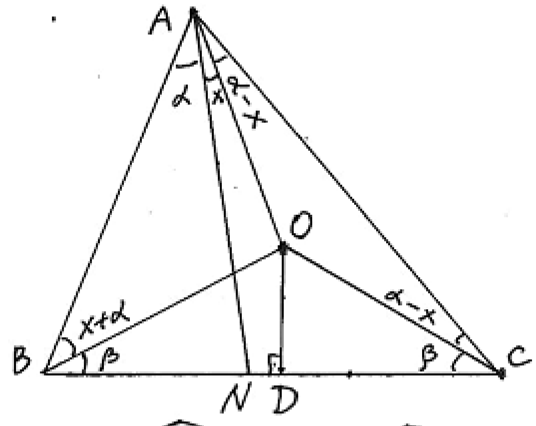
Beyaz bilye sayısı 2 artıyor veya 4 azalıyor bu durumda beyaz bilye sayısı mod 2'de değişmez

Siyah bilye sayısı 3 azalıyor veya 9 artıyor yani siyah bilye sayısı mod 3'te değişmiyor.

İlk durumdaki bilye sayılarıyla sadece D şıkkındaki bilye sayılarının bu eşitliği sağladığı görülür.

CEYDA DENEME ÇÖZÜMLER

1.



$m(\widehat{NAO}) = x$, $m(\widehat{BAN}) = \alpha$, $m(\widehat{OBC}) = m(\widehat{OCB}) = \beta$ olsun.

AN açıortay $\Rightarrow m(\widehat{OAC}) = \alpha - x = m(\widehat{OCA})$

$\widehat{ABC}$'nin açıları toplamı $180° \Rightarrow$

$2\alpha + x + \alpha + \beta + \alpha - x + \beta = 180° \Rightarrow 4\alpha + 2\beta = 180° \Rightarrow 2\alpha + \beta = 90°$

ABDO dörtgeninin açıları toplamı $360° \Rightarrow$

$x + \alpha + x + \alpha + \beta + 90° + 140° = 360° \Rightarrow$

$2x + \underbrace{2\alpha + \beta}_{90°} = 130° \Rightarrow 2x = 40° \Rightarrow x = 20° \Rightarrow$ B)

2.

1'den 2012'ye kadar olan sayılar arasında 44 tane tam kare, 12 tane tam küp ve 3 tane hem tam kare hem de tam küp olan sayı (bir tam sayının altıncı dereceden kuvveti) bulunur. Dolayısıyla dizideki sayılara $44 + 12 - 3 = 53$ sayı daha eklenmelidir. Yeni yazılan sayılar arasında $45^2 = 2025$ de bulunduğundan bir sayı daha eklersek cevap: $2012 + 53 + 1 = 2066$ (E) olur.

3.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{(n+1)\cdot(1,01)^n}{(1,01)^{n+1}\cdot n}=\frac{n+1}{n}\cdot\frac{100}{101}\Rightarrow$$

$n<100$ ise, $a_n<a_{n+1}$

$n=100$ ise, $a_n=a_{n+1}$

$n\geq 101$ ise $a_n>a_{n+1}$

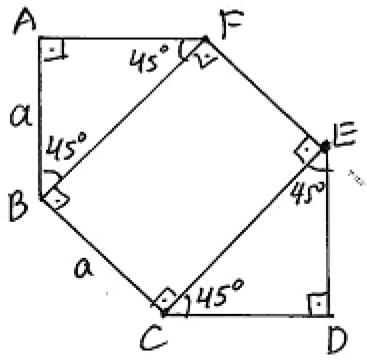
Dolayısıyla en büyük terimler

$a_{100}=a_{101}$'dir. $\Rightarrow$ (B)

4.

mod 7'de 0,1,2,...,6'ya denk olan 4'er sayı alırsak bu 28 sayı arasında mod 7'de birbirine denk olan 5 sayı bulunamaz. Öte yandan 29 sayı alınırsa $29>7\cdot 4$ olduğundan bu sayılardan mod 7'de birbirine denk olan 5 sayı bulunur (Güvercin Yuvasından) Benzer şekilde her n tam sayıdan mod 9'da birbirine denk olan 4 sayı seçilebilmesi için $n\geq 9\cdot 3+1=28$ olmalı. Her ikisini garantilemek için n en az 29 olmalı $\Rightarrow$(C)

5.



$m(\hat{B}) = m(\hat{C}) = m(\hat{E}) = m(\hat{F}) =$

$= \dfrac{720° - 2\cdot 90°}{4} = 135°$

$m(\widehat{ABF}) = m(\widehat{AFB}) = 45°$

olduğundan

$m(\widehat{FBC}) = 135° - 45° = 90°$.

Benzer şekilde $m(\widehat{BCE}) = m(\widehat{CEF}) = m(\widehat{EFB}) = 90°$ olduğu gösterilir. $|AB| = a$ ise $|BF| = a\sqrt{2}$

$2209\cdot(\sqrt{2}+1) = A(ABCDEF) = \dfrac{a^2}{2} + a^2\sqrt{2} + \dfrac{a^2}{2} = a^2(\sqrt{2}+1)$

$\Rightarrow a^2 = 2209 \Rightarrow a = 47 \Rightarrow$ (D)

6.

$10x + 15xy + 3y + 2 = 358 + 2$

$5x(2+3y) + (3y+2) = 360$

$(3y+2)(5x+1) = 360 = 2^3\cdot 3^2\cdot 5$

$(5x+1, 5) = 1$ ve $(3y+2, 3^2) = 1$ olduğundan

$5 \mid (3y+2)$ ve $9 \mid (5x+1)$.

$\begin{cases} 3y+2 = 5 & 10 & 20 & 40 & -5 & -10 & -20 & -40 \\ 5x+1 = 72 & 36 & 18 & 9 & -72 & -36 & -18 & -9 \end{cases}$

durumlarından sadece

$\begin{cases} 3y+2 = -40 \\ 5x+1 = -9 \end{cases} \Rightarrow (x,y) = (-2, -14)$

bize tam sayı çözümü veriyor $\Rightarrow$ (B)

7.

$$f(f(x)) = \frac{1-f(x)}{1+f(x)} = \frac{1-\frac{1-x}{1+x}}{1+\frac{1-x}{1+x}} = \frac{1+x-1+x}{1+x+1-x} = \frac{2x}{2} = x$$

$$\Rightarrow \underbrace{f(f\ldots f}_{100}(x)\ldots) = x \Rightarrow$$

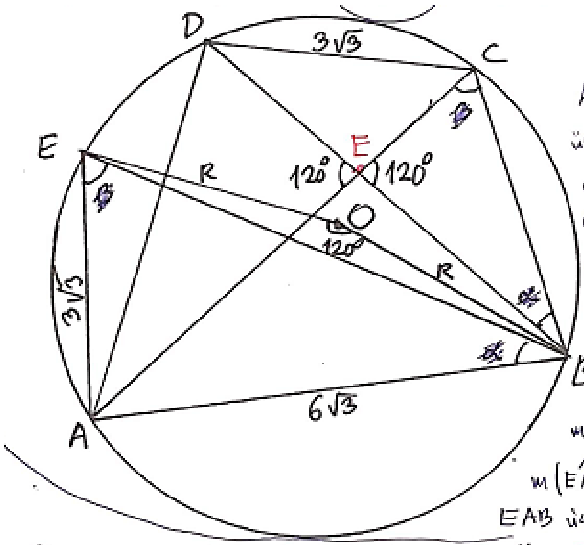
$$\underbrace{f(f\ldots f}_{101}(99)\ldots) = f(99) = \frac{1-99}{1+99} = \frac{-98}{100} = -\frac{49}{50} \Rightarrow (C)$$

8.

İlk R ile ilk A'nın oluşturduğu RA ikilisini tek harf olarak düşünelim. Bu RA harfi geriye kalan R ve A'lardan önce gelecek. Önce 13 yerden 8'ini $\binom{13}{8}$ yolla seçip buraya R ve A dışındaki 8 harfi 8! yolla yerleştirelim. Sonra ilk boş kalan yere tek yolla RA harfini yerleştirelim. Daha sonra boş kalan 4 yere 3 tane A ve 1 tane R'yi $\frac{4!}{3!} = 4$ yolla yerleştirelim.

$$\binom{13}{8} \cdot 8! \cdot 4 = \binom{13}{5} \cdot 8! \cdot 4 \Rightarrow (A)$$

9.



AD küçük yayı üzerinde $m(\widehat{AE}) = m(\widehat{DC})$ olacak şekilde E noktası alırsak $|DC| = |AE| = 3\sqrt{3}$ olur.

$$\frac{m(\widehat{AD}) + m(\widehat{BC})}{2} = 120°$$

$m(\widehat{AD}) + m(\widehat{BC}) = m(\widehat{DC}) + m(\widehat{AB})$

$= m(\widehat{EAB}) = 120°$ olur.

$m(E\hat{O}B) = 120°$ (merkez açı)

$m(E\hat{A}B) = 120°$ (çevre açı)

EAB üçgeninde kosinüs teoreminden

$|EB|^2 = (3\sqrt{3})^2 + (6\sqrt{3})^2 - 2.3\sqrt{3}.6\sqrt{3}.\cos 120$

$|EB| = \sqrt{189}$

$E\hat{O}B$'ni 30°, 30°, 120° üçgenidir. $|EB| = R\sqrt{3} = \sqrt{189} \Rightarrow |EB| = \sqrt{63} = 3\sqrt{7}$ bulunur.

10.

Sayımız $ab_{10} = 10a + b$ olsun.

$a | 10a+b \Rightarrow a | b.$
$b | 10a+b \Rightarrow b | 10a$
$\Rightarrow b = a,\ b = 2a,\ b = 5a$

1) $b = a \Rightarrow 11, 22, \ldots, 99 \Rightarrow 9$ sayı

2) $b = 2a \Rightarrow 12, 24, 36, 48 \Rightarrow 4$ sayı

3) $b = 5a \Rightarrow 15 \Rightarrow 1$ sayı

$9 + 4 + 1 = 14 \Rightarrow$ (C)

11.

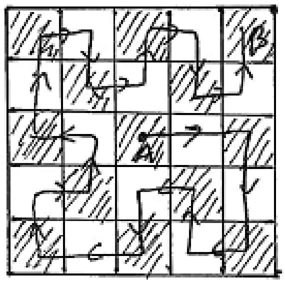
$a^2(b^2+1) + b^2 + 1 = 2004 + 1$

$(b^2+1)(a^2+1) = 2005 = 5 \cdot 401 \Rightarrow$

$(a,b) = (2,20)$ veya $(a,b) = (20,2)$

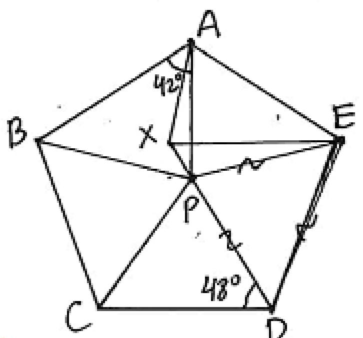
$2 + 20 + 20 + 2 = 44 \Rightarrow$ (C)

12.



Tahtayı şekildeki gibi satranç tahtası biçiminde boyadığımızda çekirge her seferinde beyaz hanedeyse siyah haneye, siyah hanedeyse beyaz haneye zıplayacak. Siyah hanelerin sayısı (13) beyaz hanelerin sayısından (12) bir fazla olduğunda çekirge tüm haneleri dolaşabilmek için siyah haneden başlayıp siyah hanede bitirmek zorunda. Dolayısıyla (A, B) ikililerinin sayısı $13 \cdot 12 = 156$'da fazla olamaz. Her (A, B) siyah hane ikilisi için bir rotanın varlığı kolayca kontrol edilir. Bir örnek şekilde verilmiş.

13.



$m(\widehat{PDE}) = 108° - 48° = 60°$. [DP) ışını üzerinde, $|DX| = |DE|$ olacak şekilde bir X noktası alalım. X noktasının P ile çakışmadığını varsayalım. Örneğin $|XD| > |PD|$ olsun. $\widehat{XDE}$ eşkenar olduğundan $m(\widehat{AEX}) = 108° - 60° = 48° \Rightarrow$ $m(\widehat{EAX}) = m(\widehat{AXE}) = \frac{180° - 48°}{2} = 66° \Rightarrow 108° = m(\widehat{BAE}) <$ $< 42° + 66° = 108° \Rightarrow$ Çelişki. Benzer şekilde $|XD| < |PD|$ durumunda da çelişki elde edilir.

$\Rightarrow X = P. \Rightarrow \widehat{PDE}$ üçgeni eşkenar. $\Rightarrow$

$\widehat{DPC} = \widehat{EAP}$ (kenar-açı-kenar) $\Rightarrow |AP| = |PC|$

$\Rightarrow \widehat{ABP} = \widehat{CBP}$ (kenar-kenar-kenar) $\Rightarrow$

$m(CBP) = \frac{108°}{2} = 54°$. $m(\widehat{BCP}) = m(\widehat{BAP}) = 42° \Rightarrow$

$\Rightarrow m(\widehat{BPC}) = 180° - (54° + 42°) = 84° \Rightarrow$ (D)

14.

$\phi(3^4)=3^4-3^3=54 \overset{\text{Euler}}{\Rightarrow} 31^{54}\equiv 1 \pmod{81}$

$2015 \div 54 = 37$, kalan 17 $\Rightarrow 31^{2015}\equiv 31^{17} \pmod{81}$

$$\left.\begin{aligned} 31^2 &\equiv -11 \pmod{81}\\ 31^4 &\equiv 40 \pmod{81}\\ 31^8 &\equiv -20 \pmod{81}\\ 31^{16} &\equiv -5 \pmod{81}\end{aligned}\right\} \Rightarrow 31^{17}\equiv -155\equiv 7 \pmod{81}$$

$7_{10}=21_3 \Rightarrow$ son dört rakam: 0021

$\Rightarrow$ (A)

15.

$n\equiv f(n)\equiv f(f(n)) \pmod 3 \Rightarrow$

$n+f(n)+f(f(n))\equiv 3n\equiv 0 \pmod 3$

$2012\not\equiv 0 \pmod 3 \Rightarrow$ Çözüm yok.

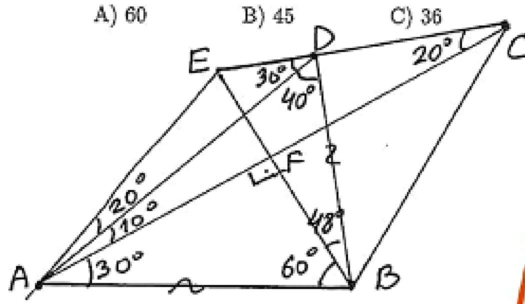
$\Rightarrow$ (E)

16.

10 kitabı 10! yolla sıralarız. Bundan sonra 3 ayraçla kitapları, hiçbir raf boş kalmayacak şekilde 4 rafa böleceğiz, bu da 10 özdeş eşyayı 4 boş olmayacak kutuya bölmekle aynıdır. Boş kalmaması için her kutuya birer eşya koyarız, sonra geriye kalan 6 eşyayı 4 kutuya $\binom{6+4-1}{4-1}=\binom{9}{3}$ yolla dağıtırız. $\Rightarrow$ (E)

17.

A) 60   B) 45   C) 36   D) 30   E) 22,5



$AC \cap BE = F$

$A\hat{B}E$ eskenar ücgen olmak üzere sekildeki gibi bir E noktası alalım. $m(\widehat{ADC})=150°$,

$m(\widehat{ACD})=20° \Rightarrow m(\widehat{DAC})=10° \Rightarrow m(\widehat{ADB})=40° \Rightarrow$

$m(\widehat{ABD})=100° \Rightarrow m(\widehat{EBD})=100°-60°=40°$

$|EB|=|AB|=|BD| \Rightarrow m(\widehat{BDE})=m(\widehat{BED})=70° \Rightarrow$

$m(\widehat{ADE})=30°.$ $m(\widehat{ADE})+m(\widehat{ADC})=30°+150°=180° \Rightarrow$

E, D, C doğrusal. olur.

$|AE|=|AB|$ ve $m(\widehat{EAF})=m(\widehat{BAF})=30° \Rightarrow$

$AF \perp EB$ ve $|EF|=|FB|$. Bu durumda $[CF]$, $C\hat{E}F$'nin hem yüksekliği, hem de kenarortayı

$\Rightarrow |CE|=|CB| \Rightarrow m(\widehat{CBE})=m(\widehat{CEB})=70° \Rightarrow$

$m(\widehat{DBC})=70°-40°=30°$

18.

$a=0,1,4$; $b=0,1,4,7$ ve $c=0,1,4,5,6,9$ olabilir, yalnız $(8,10)=2$ olduğundan a ile c ya ikiside çift, yada ikiside tek olmalı. 9 sayısı 8 ve 10 ile aralarında asal olduğu için b sayısı a ve c'den bağımsız olarak 4 değerden herbirini alabilir. $\Rightarrow (a,b,c)$'nin alabileceği değerlerin sayısı $\underset{b}{4}\cdot(\underset{\text{çift a ve c}}{2\cdot 3}+\underset{\text{tek a ve c}}{1\cdot 3})=36$ olacak. $\Rightarrow$ (C)

19.

Paydalar eşitlendiğinde

$a_{n+1}a_n - a_n a_{n-1} = n$ elde edilir.

$n=2,3,4,\ldots,34$ alınıp taraf tarafa toplandığında

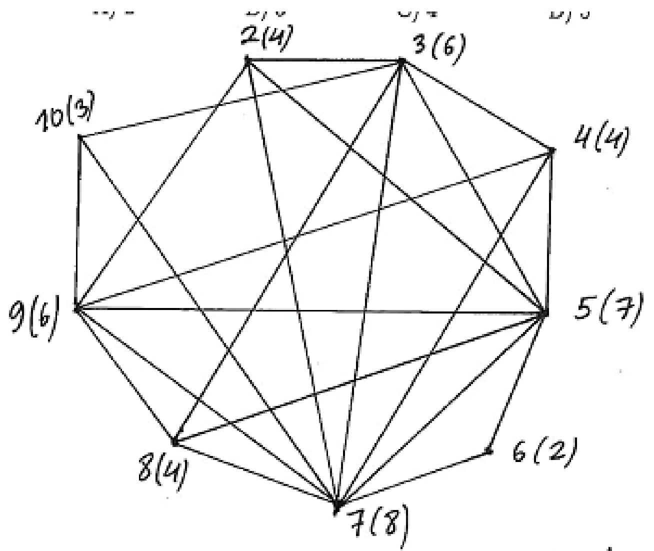
$$\begin{cases} a_3a_2 - a_2a_1 = 2 \\ a_4a_3 - a_3a_2 = 3 \\ \vdots \\ a_{34}a_{33} - a_{33}a_{32} = 33 \\ a_{35}a_{34} - a_{34}a_{33} = 34 \end{cases} \Rightarrow$$

$$a_{34}a_{33} = a_2a_1 + 2+3+\ldots+33 = \frac{35\cdot 32}{2} + 1 = 561 \Rightarrow$$

$$a_{35}a_{34} = a_2a_1 + 2+3+\ldots+34 = \frac{36\cdot 33}{2} + 1 = 595$$

$$\frac{a_{35}}{a_{33}} = \frac{a_{35}a_{34}}{a_{34}a_{33}} = \frac{595}{561} = \frac{35}{33} \Rightarrow (A)$$

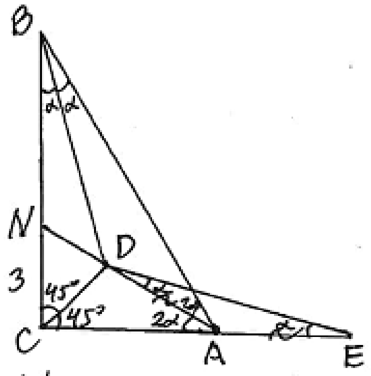
20.



Köyler köşeler, yollar da kenarlar olacak şekilde bir çizge alalım. Köşelerin dereceleri parantezde yazılı. İki köşe dışında tüm köşelerin dereceleri çift olduğundan çizgenin yarım-Euler olduğu görülür. O halde arabanın tüm kenarları dolaşabilmesi için tek dereceli köşelerin (yani 5 veya 10 numaralı) birinden çıkıp diğerinde bitirmeli.

$\Rightarrow (D)$

21.



[CA)'nın uzantısı üzerinde $|AE|=|AD|$ olacak şekilde E noktası alalım.
$m(\widehat{ADE})=m(\widehat{AED})=\alpha$ olsun. O halde
$m(\widehat{BAD})=m(\widehat{CAD})=2\alpha$. $m(\widehat{BCD})=m(\widehat{ECD})=45°$
ve $|BC|=|CA|+|AD|=|CA|+|AE|=|CE|=|BC|$
olduğundan $\overset{\triangle}{BCD}=\overset{\triangle}{ECD} \Rightarrow m(\widehat{ABD})=$
$=m(\widehat{CBD})=m(\widehat{CED})=\alpha \Rightarrow 6\alpha=90° \Rightarrow \alpha=15°$
$\Rightarrow 2\alpha=30° \Rightarrow |AN|=2\cdot|NC|=6$

22.

$252=4\cdot 9\cdot 7$. Denkliği mod 4, mod 7 ve mod 9'da incelediğimizde
$x\equiv 1$ vey 3 (mod 4), $x\equiv 7$ (mod 9), $x\equiv 0$ (mod 7)
elde ederiz. Son iki denkliği sağlayan x'ler için $x\equiv 7$ (mod 63) olacak $\Rightarrow$
$x\equiv 7, 70, 133$ veya 196 (mod 252) olabilir.
Bunlardan $x\equiv 1$ (mod 4)'ü sağlayan $x\equiv 133$ (mod 252) var, buradan da
$0\le x<2^{10}$ eşitsizliğini sağlayan 4 sayı geliyor.
$x\equiv 3$ (mod 4)'ü sağlayan $x\equiv 7$ (mod 252) var, bunlardan da $0\le x\le 2^{10}$'u sağlayan 5 sayı var.

$\Rightarrow$ (D)

23.

Çözüm 1 A) 30 B) 36 C) 42 D) 48 E) 54

$g(x)=x^3+x^2$ fonksiyonu koşulu sağlar.

$h(x)=f(x)-g(x)$ olsun $\Rightarrow$

$h(x+y)-h(x)-h(y)=f(x+y)-f(x)-g(x)-$

$-(g(x+y)-g(x)-g(y))=0 \Rightarrow h(x)$ fonksiyonu

Euler denklemini sağlıyor $\Rightarrow h(x)=kx$

$\Rightarrow f(x)=g(x)+h(x)=x^3+x^2+kx$

$f(1)=4 \Rightarrow 1+1+k=4 \Rightarrow k=2 \Rightarrow$

$f(x)=x^3+x^2+2x \Rightarrow f(3)=27+9+6=42$

$\Rightarrow$ (C)

Çözüm 2

$x=y=1$ için

$f(2)-2f(1)=8$, $f(2)=16$

$x=2$ ve $y=1$ için

$f(3)-f(2)-f(1)=22$

$f(3)=42$ bulunur.

24.

n gün boyunca Ali'nin denize girme sayısı a_n olsun. $a_1=1$; $a_2=2$; $a_3=3$

$n\geq 4$ için a_n'i aşağıdaki durumlarda inceleyelim.

1) n. gün girmemiştir. Bunların sayısı a_{n-1}

2) n. gün girmiş, (n-1). gün girmemiş. Bunlar da a_{n-2}

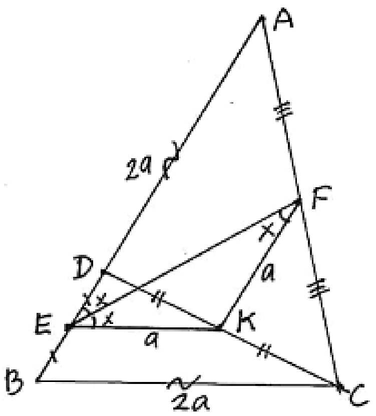
3) n. gün de, (n-1). gün de ~~girmemiş~~ girmiş
Bu durumda (n-3). gün giremez.
Bunlar da a_{n-3}.

$\Rightarrow a_n=a_{n-1}+a_{n-2}+a_{n-3} \Rightarrow a_4=6$; $a_5=11$,

$a_6=20$, $a_7=37$; $a_8=68$, $a_9=125$

$\Rightarrow$ (B)

25.



EK ∥ BC çizelim. $|FK| = a$ olsun. $|DK| = |KC|$

$\Rightarrow |BC| = |AD| = 2 \cdot |KF| = 2a \Rightarrow |$[illegible]$| = a$

KF

FK ∥ AE olduğundan $m(\widehat{AEF}) = m(\widehat{KFE}) = x$ ve,

$m(\widehat{FEK}) = m(\widehat{EFK}) = x$. EK ∥ BC $\Rightarrow 2x = 70° \Rightarrow$

$x = 35°$ $\Rightarrow$ (C)

$|EK| = |KF|$

25

26.

$(5k+1)^{29} + (5k+2)^{29} + (5k+3)^{29} + (5k+4)^{29} + (5k+5)^{29} \equiv$

$\equiv 1^{29} + 2^{29} + (-2)^{29} + (-1)^{29} + 0 \equiv 1 + 2 - 2 - 1 \equiv 0 \pmod 5$

$\Rightarrow 1^{29} + 2^{29} + \ldots + 2013^{29} \equiv 1^{29} + 2^{29} + 3^{29} \equiv$

$\equiv 1^{29} + 2^{29} + (-2)^{29} \equiv 1 \pmod 5$. Benzer şekilde

$(11k+1)^{29} + (11k+2)^{29} + \ldots + (11k+11)^{29} \equiv 0 \pmod{11}$

$\Rightarrow 1^{29} + 2^{29} + \ldots + 2013^{29} \equiv 0 \pmod{11} \Rightarrow$

$1^{29} + 2^{29} + \ldots + 2013^{29}$'un 55 modundaki değeri 0, 11, 22, 33, 44 olabilir. Bunlardan mod 5'te 1 olan 11 var.

$\Rightarrow$ (A)

27.

$x=y=0 \Rightarrow f(1)+f(0) = f^2(0)+2 \quad (1)$

$y=0 \Rightarrow f(1)+f(x) = f(x)f(0)+2 \quad (2)$

$f(x)-f(0) = f(0)\cdot(f(x)-f(0))$

$f(x)$ sabit değil $\Rightarrow f(0)=1 \Rightarrow f(1)=2$

$x=y=1 \Rightarrow f(2)+f(0) = f^2(1)+2 = 6 \Rightarrow f(2)=5$

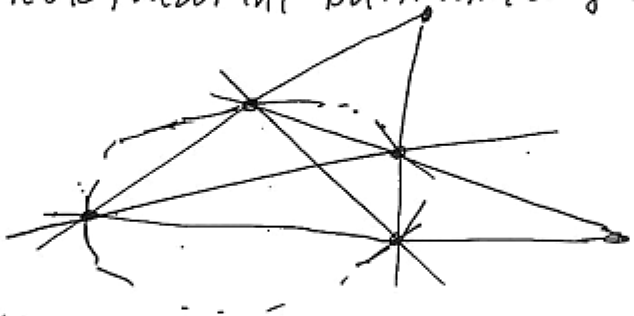
$x=2, y=1 \Rightarrow f(3)+\underset{\overset{\parallel}{2}}{f(1)} = f(2)f(1)+2 = 5\cdot 2+2$

$\Rightarrow f(3)=10 \; \cancel{\Rightarrow (E)}$

(1) denklemi (−) ile çarpılıp (2) denklemi ile toplanırsa

28.

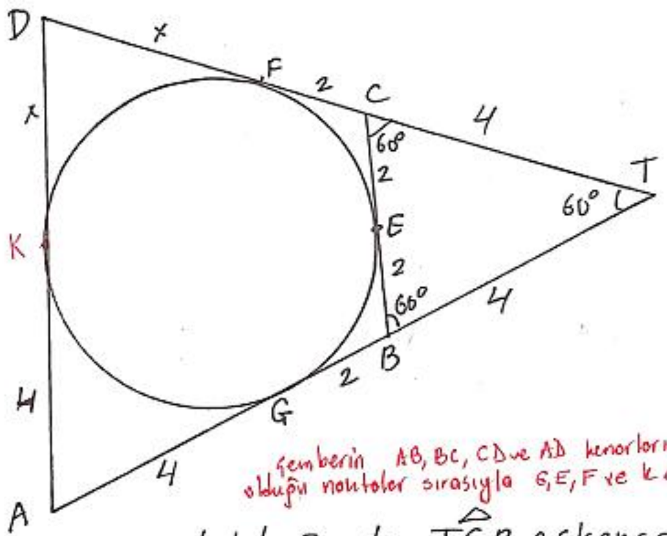
Bahsedilen kesişim noktalarından birini elde etmek için 4 köşe alıp, bunlardan ikisinden geçen tüm doğruların 11-gen dışındaki kesişim noktalarını bulmamız gerekir.



Her dörtlünün bize 2 kesişim noktasını verdiğini görüyoruz.

$\binom{11}{4}\cdot 2 = \dfrac{11\cdot 10\cdot \overset{3}{\cancel{9}}\cdot\cancel{8}}{1\cdot\cancel{2}\cdot\cancel{3}\cdot\cancel{4}}\cdot 2 = 660 \Rightarrow (B)$

29.



Çemberin AB, BC, CD ve AD kenarlarına teğet olduğu noktalar sırasıyla G, E, F ve K olsun.

DC ve AB uzatıldığında $\widehat{TCB}$ eşkenar üçgeni elde edilir. $|FC|=|CE|=|EB|=|BG|=2$, $|AG|=|AK|=4$, $|DK|=|DF|=x \Rightarrow$

Kosinüs teoreminden

$(x+4)^2=(x+6)^2+10^2-2(x+6)10\cos 60° \Rightarrow$

$x^2+8x+16=x^2+12x+36+100-10x-60 \Rightarrow$

$6x=60 \Rightarrow x=10$

$A(ABCD)=A(\widehat{ATD})-A(\widehat{TCB})=$

$=\frac{1}{2}\, 16\cdot 10\cdot \sin 60° - \frac{4^2\sqrt{3}}{4}=40\sqrt{3}-4\sqrt{3}=36\sqrt{3}$

30.

$f(x^2)+f(x^2+1)+\ldots+f(x^2+x-1)+f(x^2+x)+f(x^2+x+1)+$
$+\ldots+f(x^2+2x)=0+1+\ldots+x-1+0+1+\ldots+x-1+0=$
$=2\cdot\frac{(x-1)x}{2}=x(x-1) \Rightarrow$ ve $f(9)=0$'dır.

$f(9)+f(10)+f(11)+\ldots+f(99)=f(9)+\ldots+f(15)+$
$+f(16)+\ldots+f(24)+f(25)+\ldots+f(35)+\ldots+$
$+f(81)+\ldots+f(99)=3\cdot 2+4\cdot 3+5\cdot 4+6\cdot 5+7\cdot 6+$
$+8\cdot 7+9\cdot 8=6+12+20+30+42+56+72=238$

31.

$$f(x)=x^3+\frac{15}{x^5}=\frac{x^3}{5}+\frac{x^3}{5}+\frac{x^3}{5}+\frac{x^3}{5}+\frac{x^3}{5}+$$

$$+\frac{5}{x^5}+\frac{5}{x^5}+\frac{5}{x^5}\overset{AGO}{\geqslant}8\sqrt[8]{\underbrace{\frac{x^3}{5}\cdot\ldots\cdot\frac{x^3}{5}}_{5}\cdot\frac{5}{x^5}\cdot\frac{5}{x^5}\cdot\frac{5}{x^5}}=$$

$$=8\cdot\sqrt[8]{\frac{1}{5^2}}=\frac{8}{\sqrt[4]{5}}\Rightarrow m=\frac{8}{\sqrt[4]{5}}$$ ol

eşitsizliğin eşitliğe dönüşmesi için $\frac{x^3}{5}=\frac{5}{x^5}$ olması gerekir, bu da $x=\sqrt[4]{5}$ durumunda sağlanır.

$m\cdot\sqrt[4]{5}=8 \Rightarrow (D)$

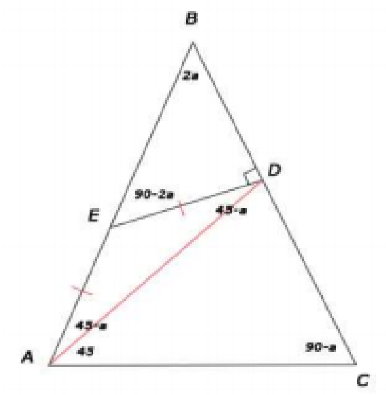
32.

m ve n çiftse tablonun simetri merkezi kafes noktasına denk geliyor ve ikinci oyuncu her adımda birinci kişinin son boyadığı hanenin merkeze göre simetriğini boyayarak kazanır. m ve n çiftse simetri merkezi bir hanenin merkezine denk gelir. Bu durumda birinci kişi ilk olarak merkezdeki haneyi boyar, sonra ikincinin boyadığı hanenin merkeze göre simetriğini boyayarak kazanır. 2×2013 tablosunda birinci kişi 1007. sütundaki 2 haneden birini boyar, sonra da ikincinin boyadığı hanelerin, tablonun dikey simetri doğrusuna göre simetriğini boyayarak kazanır. Böylece ilk hamleyi yapan kişi 2011×2013, 2013×2013 ve 2×2013 durumlarında kazanmayı garantiler. $\Rightarrow (C)$

YAĞIZ DENEME ÇÖZÜMLER

1.

Çözüm: ABC ikizkenar üçgeninde $|AB| = |BC|$ olduğundan, $m(\widehat{A}) = 2a$ için, $m(\widehat{BAC}) = m(\widehat{BCA}) = 90 - a$ olur. BED dik üçgeninde, $m(\widehat{ABC}) = 2a$ olduğundan, $m(\widehat{DEB}) = 90 - 2a$ olur. Burdan da $m(\widehat{BAC}) = m(\widehat{BCA}) = 45 - a$ olduğu görülür. $m(\widehat{BCA}) = 45 - a$ ve $m(\widehat{BAC}) = 90 - a$ olduğundan $m(\widehat{DAC}) = 45$ olur.



2.

Çözüm: $x^2 + y^2 \equiv 0 \pmod 7$. $\Rightarrow x = 7a$, $y = 7b$ dir. Bunlar denklemde yerine yazılırsa $z = 7c$ bulunur. Böylece denklem $a^2 + b^2 + 7c^2 = 71 \cdot 7^{2011}$ olur. Aynı şekilde devam edilirse, $u^2 + v^2 + 7w^2 = 71 \cdot 7$ bulunur. Son eşitlik $u^2 + v^2 = 7 \cdot (71 - w^2)$ şeklinde yazılırsa, $71 - w^2 = 7k$ olduğu görülür. $w^2 = 1, 36$ olabilir. Bu w değerleri denklemde yerine yazılırsa, $r^2 + s^2 = 10$, $r^2 + s^2 = 5$ bulunur. Buradan (1,3,1), (3,1,1), (1,2,6), (2,1,6) çözümleri bulunur.

3.

Çözüm: $x + y + z = t$ diyelim.

$$S \leq \frac{(x+y+z)^2}{2(x+y+z)-6} = \frac{t^2}{2t-6} = \frac{1}{2} \cdot \frac{t^2}{t-3} = \frac{1}{2} \cdot \frac{(t-3+3)^2}{t-3} =$$

$$\frac{1}{2} \cdot \left[(t-3) + 6 + \frac{9}{t-3}\right] \geq \frac{1}{2}\left[6 + 2\sqrt{9}\right] = 6 \Rightarrow S \geq 6.$$

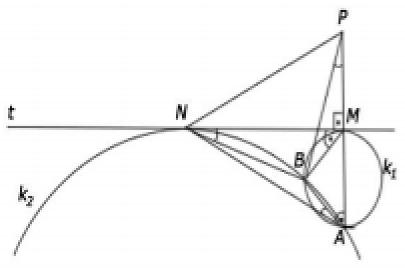
(Eşitlik durumu: $x = \frac{17}{7}$; $y = \frac{12}{7}$; $z = \frac{13}{7}$.)

4.

Çözüm: Her hamlede bakteri sayısı ya $21-1=20$ azalıyor, ya da $9-1=8$ artıyor. O halde $\text{ebob}(20,8)=4$ olduğundan bakteri sayısı mod 4'te değişmez. $2015 \equiv 3 \pmod 4$ olduğundan bakteri sayısı 3'ten daha küçük yapılamaz. Öte yandan önce birinci işlemi 100 kez yaparak bakteri sayısı 15'e indirilir, sonra ikinci işlemle 23 olur ve sonra da birinci işlemle 3'e indirilir.

5.

Çözüm: K noktası t doğrusunun teğet noktası ve $t \perp AK$ olduğuna göre, $[KA]$, k_1 çemberinin çapıdır. A noktasının t doğrusuna göre simetriği P olsun. Buna göre, PLA üçgeni ikizkenar üçgen olur. Buna göre, $|LA|=|LP|$ ve $|KA|=|KP|$ dir. Buradan $|KL|=|AP|$ olduğu görülür. Çemberde çevre açı ve teğet kiriş açıların özelliğinden, $m(\widehat{BAP})=m(\widehat{LKB})=\alpha$



ve $m(\widehat{KLB})=m(\widehat{LAB})=\beta$ dersek, $m(\widehat{LAP})=m(\widehat{LPA})=\alpha+\beta$ olur. Buna göre, $m(\widehat{LBK})=m(\widehat{LPK})=180$ olup, $LBKP$ dörtgeni kirişler dörtgenidir. $LBKP$ dörtgeni kirişler dörtgeni olduğundan $m(\widehat{KLB})=m(\widehat{BPA})=\alpha$ olur. $m(\widehat{KLB})=m(\widehat{BPA})=\alpha, m(\widehat{LKB})=m(\widehat{PAB})=\beta$ ve $|KA|=|KP|$ olduğundan $LBK \cong PBA$ dır. O halde $|KB|=|BA|$ dır ve buradan $(\widehat{LKB})=45$ dir.

6.

Çözüm: $40=1\cdot 40=2\cdot 20=1\cdot 2\cdot 20=2\cdot 2\cdot 10=4\cdot 10=1\cdot 4\cdot 10$ şeklindedir. $\phi(n)=5$ olacak şekilde bir tam sayı olmadığı için 5 çarpanı yazılmadı. Böylece istenen sayılar sırasıyla aşağıdakilerdir:

$$41,\ 2\cdot 41,\ 3\cdot 25,\ 4\cdot 25,\ 2\cdot 3\cdot 25,\ 3\cdot 4\cdot 11,\ 5\cdot 11,\ 8\cdot 11,\ 2\cdot 5\cdot 11.$$

7.

$$\frac{(x+y)(y+z)}{\sqrt{xyz}} = \frac{xz + y(x+y+z)}{\sqrt{xyz}} = \frac{xz+9y}{\sqrt{xyz}} \geq^{AGO}$$

$$2 \cdot \sqrt{xz \cdot 9y} \cdot \frac{1}{\sqrt{xyz}} = 6$$

Eşitlik durumu: $x+y+z=9$ ve $xz=9y$ sağlayan x,y,z bulmalıyız. Örneğin; $z=3$ alalım. Buradan $x=\frac{9}{2}$, $y=\frac{3}{2}$ bulunur. Yerine koyarsak, $S=6$ olur.

8.

Çözüm: Bu tahtaların hepsini içeren 9×9 boyutlu tahtayı ele alalım. Başlangıçta taşın A hanesinde olduğu durumda oyunu, ilk hamleyi yapan kişi kazanıyorsa, A hanesine $+$, kaybediyorsa $-$ yazacağız. Taş

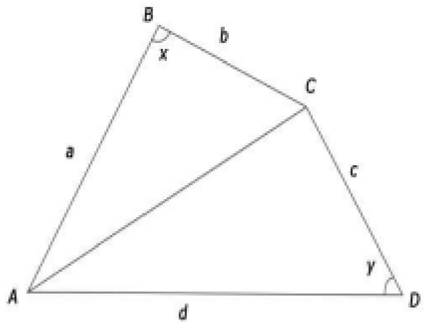
sağ üst köşedeyse hamle yapılamaz, dolayısıyla bu haneye $-$ yazılacak. Bu hanenin bir solundaki, iki solundaki ve altındaki 3 haneden birinde bulunan taş bu haneye tek hamlede getirilebileceğinden bu 3 haneye $+$ yazılacak. Önce sağ ve üst kenarlardan başlayarak bu şekilde devam ederek tüm tahtayı $-$ ve $+$'larla kapatırız.

$+$	$+$	$-$	$+$	$+$	$-$	$+$	$+$	$-$
$+$	$-$	$+$	$+$	$-$	$+$	$+$	$-$	$+$
$+$	$+$	$-$	$+$	$+$	$-$	$+$	$+$	$-$
$+$	$-$	$+$	$+$	$-$	$+$	$+$	$-$	$+$
$+$	$+$	$-$	$+$	$+$	$-$	$+$	$+$	$-$
$+$	$-$	$+$	$\boxed{+}$	$-$	$+$	$+$	$-$	$+$
$+$	$+$	$\boxed{-}$	$+$	$+$	$-$	$+$	$+$	$-$
$+$	$\boxed{-}$	$+$	$+$	$-$	$+$	$+$	$-$	$+$
$\boxed{+}$	$+$	$-$	$+$	$+$	$-$	$+$	$+$	$-$

Sorudaki 4 tane tahtanın sol alt köşelerine denk gelen haneler kutucuklarla işaretlenmiştir. Bunlardan ikisinin $+$, ikisinin de $-$ içerdiğini görüyoruz. Böylece oyunlardan ikisini başlayan oyuncu kazanmayı garantileyebilir.

9.

Çözüm: $A(ABCD) = S$ olsun. Buna göre, $A(ABCD) = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin x + \frac{1}{2} \cdot c \cdot d \cdot \sin y \leq \frac{a \cdot b + c \cdot d}{2}$ (1) Aynı şekilde $S \leq \frac{a \cdot b + c \cdot d}{2}$ (2) Şimdi (1)+(2) den $S \leq \frac{a \cdot b + c \cdot d + a \cdot d + b \cdot c}{4} = \frac{(a+c) \cdot (b+d)}{4}$ olup buradan, $S \leq \frac{6 \cdot 8}{4} = 12$ bulunur. Eşitlik durumu $ABCD$ nin dikdörtgen olmasında sağlanır.



10.

Çözüm: $385 = 5 \cdot 7 \cdot 11$ dir. $x^8 \equiv 1 \pmod 5$ ise, Fermat Teoreminden $x \equiv 1, 2, 3, 4 \pmod 5$. $x^8 \equiv (x^2-1)(x^2+1)(x^4+1) \equiv 1 \pmod{7 \cdot 11}$ ise $x^2 \equiv 1 \pmod 7$ ve $x^2 \equiv 1 \pmod{11}$ olmalıdır. 7 ve 11 sayıları $4k+3$ şeklinde olduğundan, $x^2 \equiv -1 \pmod{7, 11}$ denkliğinin çözümü yoktur. Böylece $x \equiv 1, 6 \pmod 7$ ve $x \equiv 1, 10 \pmod 1)1$ bulunur. Çin Kalan Teoreminden $x^8 \equiv 1 \pmod{385}$ denkliğinin $1 \leq x \leq 385$ aralığında $4 \cdot 2 \cdot 2 = 16$ çözümü bulunur.

11.

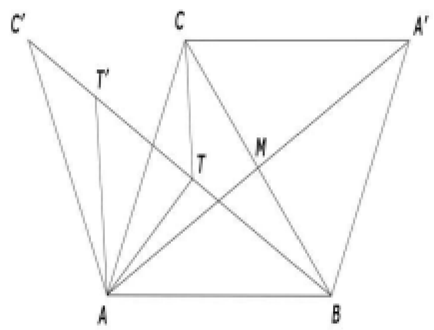
Çözüm: a_i'lerin k tanesi tek ve $(12-k)$ tanesi çift olsun. O halde, $a_i a_j$ şeklindeki tek sayılar: $k(k-1)$ tane; $a_i + a_j$ şeklindeki tek sayılar: $2k(12-k)$ tane; $a_i - a_j$ şeklindeki tek sayılar: $2k(12-k)$ tanedir. O halde, tek sayıların toplam sayısı: $k(k-1) + 4k(12-k) = k^2 - k - 48k - 4k^2 = -3k^2 + 47k = k(47 - 3 \cdot k) = \frac{1}{3} \cdot 3k(47-3k)$ olur. $3x \cdot (47-3x)$ ifadesi en büyük değerini $3x = 47 - 3x$, yani $x = \frac{47}{6}$ durumunda alır. $\frac{47}{6}$'ya en yakın tam sayı 8 olduğundan, $k = 8$ ve $k(47-3k) = 8(47-24) = 184$.

12.

Çözüm: Hiçbir kısıtlama olmadan 11 bilye 4 kutuya $\binom{14}{3} = 364$ yolla dağıtılabilir. Birinci kutunun taştığı durum sayısı $\binom{9}{3} = 84$, ikinci kutunun taştığı durum sayısı $\binom{8}{3} = 56$, üçüncü kutunun taştığı durum sayısı $\binom{7}{3} = 35$ ve dördüncü kutunun taştığı durum sayısı da $\binom{6}{3} = 20$'dir, fakat ilk iki kutu aynı anda tek yolla taşabildiği için aranan durum sayısı $364 - 84 - 56 - 35 - 20 + 1 = 170$'dir.

13.

Çözüm: ATC üçgenini A etrafında saat yönünün tersine 60 derece döndürüldüğünde T noktası T' ve C köşesi de C' ne karşılık gelsin. $m(\widehat{ATB}) = m(\widehat{BTC} = m(\widehat{CTA}) = 120$ olduğundan, B, T, T', C' noktaları doğrusal olacaktır. Buna göre, $|TA| + |TB| + |TC| = |BC'|$ olur. $[AM]$ doğru parçasını M yönünde



$|AM| = |MA'|$ olacak şekilde M' noktasına kadar uzatırsak, $ABA'C$ bir paralelkenar olur. $m(\widehat{A}) = 60$ olduğunda $m(\widehat{CAB}) = 60$ ve ABA'C paralelkenar olduğundan $m(\widehat{ABA'}) = 60$ olur. ACC' üçgeni eşkenar üçgen olduğundan $m(\widehat{BAC'}) = 120$ olup $C'AB \cong A'BA$ (K.A.K eşlik aksiyomu) tir. O halde $|TA| + |TB| + |TC| = |AA'| = 2.|AM|$ dır.

14.

Çözüm: $(3x-2y)(2x-3y) = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^2$. Çarpanların toplamı $5(x-y)$ dir. Bu nedenle çözüm sayısı, $2^2 \cdot 3^2$ sayısının tam bölenlerinin sayısına, yani $2 \cdot 3 \cdot \ 3 = 18$'e eşittir.

15.

Çözüm: $P(x) + 2x$ üçüncü dereceden polinomu $(x-1)(x-2)$'ye bölündügünden, $P(x)+2x = 2\cdot(x-1)(x-2)(x-c)$ yazılabilir. (Burada, c bir reel sayıdır). Sonuçta, $P(x) = -2x + 2(x-1)(x-2)(x-c)$ olur.

$$P(5) = -10 + 2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot (5-c) = -10 + 120 - 24 \cdot c = 110 - 24 \cdot c;$$

$$P(-2) = 4 + 2 \cdot (-3)(-4)(-2-c) = 4 - 48 - 24 \cdot c = -44 - 24c.$$

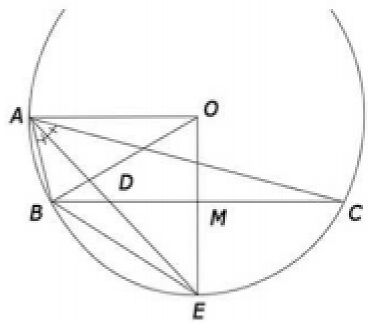
Buradan, $P(5) - P(-2) = 110 + 44 = 154$.

16.

Çözüm: $n = 1, 2, 3$, v.s. durumlarını incelediğimizde n'nin tek değerlerinde başlayanın, çift değerlerinde de ikinci oyuncunun kazanabileceğini görüyoruz. Gerçekten, n tekse ve 3^i şeklinde değilse başlayan n'den küçük olan bir 3^i sayısı kadar taş alarak geriye çift sayıda taş bırakıyor. İkinci oyuncu da tek sayıda taş alacağı için geriye tek sayıda taş kalacak. Böylece başlayanın her hamlesinden sonra çift sayıda, ikincinin her hamlesinden sonra da tek sayıda taş kalacak. Gittikçe taş sayısı azalacağından başlayanın bir hamlesinden sonra 0 taş kalacak, yani başlayan istemese bile kazanacak. Benzer şekilde n'nin çift olduğu durumda ikinci kişinin kazanacağı gösterilir.

17.

Çözüm: ABC üçgeninde, AD açıortayı çemberi A ve E noktasında kessin. $[BC]$ nin orta noktası M ve çevrel çemberinin merkezi O olsun. BE ve CE yayları eşi olduğundan O, M ve E noktaları doğrusal ve $[OE] \perp [BC]$ $m(\widehat{CDE}) = m(\widehat{ADB}) = 45$ dir. $|AO| = |EO|$ ve $m(\widehat{AOE}) = 90$ olduğundan $AO \parallel DM$.



$|BD| \cdot |CD| = |AD|^2$ verildiğinden, $|AD| = |DE|$ dir. $BC, [OM]$ nin orta dikmesi olduğundan, $|BO| = |BE|$ dir. $|BO| = |EO|$ olup BOE üçgeni eşkenar üçgen olur. BOE üçgeni eşkenar üçgen olduğundan, $m(\widehat{BAE}) = 30$ dir. Buradan $m(\widehat{BAC}) = 60$ elde edilir. $m(\widehat{ABE}) = 135$ ve $m(\widehat{ACB}) = 15$ bulunur. Buradan $m(\widehat{ACB}) = 105$.

18.

Çözüm: $2(x+y)^2 + (x-y)^2 = 664$. Buradan $x-y$ ve $x+y$ çift sayılardır. $x+y = 2m, x-y = 2t$ olsun. Buradan da $2m^2 + t^2 = 166$, dolayısıyla t çifttir. $t = 2k$ olursa $m^2 + 2k^2 = 83$. Bu denklemi sadece $k = 1, m = 9$ sağlar, yani $x+y = 18$. Cevap: C.

19.

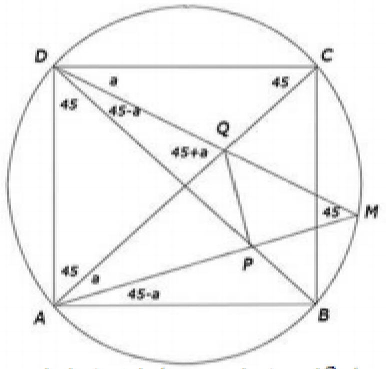
Çözüm: $x \geq -2$ olması gerektiği açıktır. $x+2 = y$ diyelim. $x = y-2$ olur ve eşitsizlik aşağıdaki şekle gelir:
$(y+5)\cdot(\sqrt{y}-1)^2 - (y-2)^2 \geq 0 \Leftrightarrow (y+5)\cdot(\sqrt{y}-1)^2 - (\sqrt{y}+1)^2 \geq 0$.
$y = 1$ eşitsizliği sağlar. $y \neq 1$ için her tarafı $(\sqrt{y}-1)^2$'ye bölersek, $y+5 \geq (\sqrt{y}+1)^2 \Leftrightarrow y+5 \geq y+2\sqrt{y}+1 \Leftrightarrow \sqrt{y} \leq 2 \Leftrightarrow y \leq 4 \Leftrightarrow x+2 \leq 4 \Leftrightarrow x \leq 2$. Böylece, $-2 \leq x \leq 2$ ve aralığın uzunluğu $2-(-2) = 4$'tür.

20.

Çözüm: Her hamle sonucu beyaz (siyah, kırmızı) bilyelerin sayısı tekse çifte, çiftse de teke dönüşüyor. O halde sonunda tek bir beyaz bilye, yani 1 beyaz, 0 siyah, 0 kırmızı bilye kalması için başlangıçta siyah ve kırmızı bilye sayılarının ikisinin de tek veya ikisinin de çift olması, beyaz bilye sayısının bunların tersine sırasıyla çift veya tek olması gerekir. Sadece a) şıkında siyah ve kırmızılar tek, beyazlar da çift olduğundan bu şık bize doğru cevabı veriyor. $(2010, 2011, 2013)$ durumundan $(1, 0, 0)$ durumunun elde edilebileceği kolayca görülür.

21.

Çözüm: Şekilde görüldüğü gibi $m(\widehat{DMA}) = 45$ dir. $m(\widehat{CAM}) = \alpha$ için $m(\widehat{MDC}) = \alpha$ olur. $APQD$ dörtgeni köşegenleri dik kesişen bir dörtgen olup, $A(APQD) = |DP| \cdot |AQ|/2$ dir. $APD \sim QDA$ olup, $\dfrac{|DP|}{|DA|} = \dfrac{|AD|}{|AQ|}$ ise,



$|AD|^2 = |DP| \cdot |AQ|$. Buradan $A(APQD) = |DP| \cdot |AQ|/2 = |AD|^2/2 =$ 50 bulunur.

22.

Çözüm: $n = 1$ alınırsa tüm $(m, 1)$ ikilileri sağlar. Yani cevap D.

23.

Çözüm: $2 - 7x = u^3$ ve $7x - 1 = v^2, (v \geq 0)$ diyelim.

$\{u + v = 1$ ve $u^3 + v^2 = 1\} \Leftrightarrow \{v = 1 - u$ ve $u^3 + v^2 = 1\} \Rightarrow$ $u^3 + (1 - u)^2 = 1 \Rightarrow u^3 + u^2 - 2u + 1 = 1 \Rightarrow u \cdot (u^2 + u - 2) = 0 \Rightarrow$

1) $u = 0$, veya 2) $u^2 + u - 2 = 0$.

1)'den: $2 - 7x = 0 \rightarrow x_1 = \dfrac{2}{7}$;

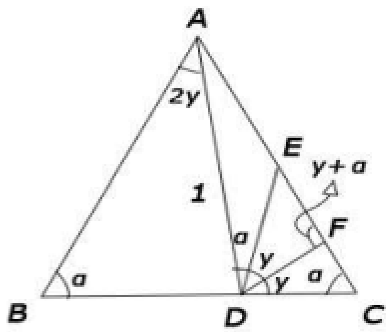
2)'den: $(u + 2)(u - 1) = 0 \rightarrow u = 1$ veya $u = -2 \rightarrow 2 - 7x = 1$, veya $2 - 7x = -8 \rightarrow x_2 = \dfrac{1}{7}; x_3 = \dfrac{10}{7} \rightarrow x_1 + x_2 + x_3 = \dfrac{13}{7}$.

24.

Çözüm: Önce iki karşı köşeyi (örneğin A ve B köşelerini) renklerden biriyle tek yolla boyarız. Şimdi A'yla kenar bağlantısı olan üç köşeyi boyarsak geriye kalan üç köşe tek yolla boyanacak, çünkü bunların karşı köşeleridir. Küp A ve B köşelerinden geçen eksen boyunca döndüğünde birbirinden elde edilebilen durumlar aynı olacağından A'yla kenar bağlantısı olan üç köşenin boyama sayısı dairesel permütasyonla hesaplanır, yani $2! = 2$'ye eşittir.

25.

Çözüm: Sorunun geometrik gösterimi şekildeki gibidir. $|AB| = |AC| \Leftrightarrow m(\widehat{B}) = m(\widehat{C}) = \alpha$ ve $\dfrac{|AB|}{|BD|} = \dfrac{|DC|}{|CE|} \Rightarrow \dfrac{|AB|}{|DC|} = \dfrac{|BD|}{|CE|}$. $\dfrac{|AB|}{|DC|} = \dfrac{|BD|}{|CE|}$ ve $m(\widehat{B}) = m(\widehat{C})$ ise $ABD \sim DCE \Rightarrow m(\widehat{EDC}) = m(\widehat{DAB}) = 2y$ olur.



$(\widehat{ADF}) = m(\widehat{DFA}) = \alpha + \beta$ yani $|AD| = |AF| = 1$ birim bulunur.

26.

Çözüm: mod 11'de incelediğimizde $a^2 + b^2 = 0 \pmod{11}$, buradan da $a = 11k$ ve $b = 11m$ elde ederiz. Diğer taraftan b çifttir, yani d) önermesi doğrudur. $a = 11, b = 22, c = 88$ için a), b), c) şıkları yanlıştır. Cevap: d).

27.

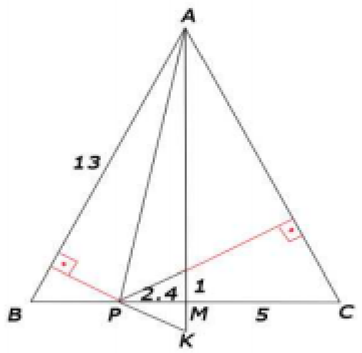
Çözüm: $3x \cdot P(x) - 1$ polinomunu $Q(x)$ ile gösterirsek, $Q(1) = 0$, $Q(2) = 0, \ldots, Q(11) = 0$ ve Q, on birinci dereceden bir polinom olduğundan, $Q(x) = a\cdot(x-1)(x-2)\cdot\ldots\cdot(x-11)$. Öte yandan $Q(0) = 1$ olduğundan, $a = \dfrac{1}{11!}$ bulunur. O halde $Q(12) = 1$ ve dolayısıyla, $P(12) = \dfrac{2}{3\cdot 12} = \dfrac{1}{18}$.

28.

Çözüm: Bu okulda herkesle arkadaş olan bir kişinin bulunduğunu kanıtlayalım. 500 kişilik herhangi bir grup alalım. Grup dışından bir A kişisi gruptakilerin her biriyle arkadaştır. Gruptan bir B kişisini alalım. A ile B'yi içeren 500 kişilik bir grup alalım. Bunların her biriyle arkadaş olan bir C kişisi var. O halde A, B, C birbiriyle arkadaştır. Bu 3 kişiyi içeren bir 500 kişilik grup alalım. Bunların her biriyle arkadaş olan bir D kişisi var. A, B, C, D arkadaştır v.s. bu şekilde devam ederek birbiriyle arkadaş olan 501 kişi buluruz. Geriye kalan 500 kişinin oluşturduğu grubu alalım. Gruptakilerin her biriyle arkadaş olan bir X kişisi var. X, grup dışından olduğundan, ilk 501 kişiden biridir ve dolayısıyla herkesle arkadaştır. Cecvap: 1000.

29.

Çözüm: H ve K sırasıyla APB ve APC üçgenlerinin diklik merkezleri olduğundan, $[KP]\perp[AB]$ ile $[AH]\perp[BC]$ dir. Buna göre, $m(\widehat{ABC}) = m(\widehat{ACB}) = m(\widehat{PHK}) = m(\widehat{PKA})$ dır. Buradan, $PHK \sim ABC$ elde edilir. Benzer iki üçgenin eş açılarına ait yüksekliklerin oranı, benzerlik oranına



eşit olacağından, $\dfrac{PM}{AM} = \dfrac{HK}{BC}$ ise $|PM| = |AM| \cdot \dfrac{|HK|}{|BC|} = \sqrt{13^2 - 5^2} \cdot \dfrac{2}{10} = 2,4$ ve $|PC| = |PM| + |MC| = 2,4 + 5 = 7,4$ bulunur.

30.

Çözüm: $(n^6 - 1) \cdot (n^{12} + n^6 + 1) \equiv n^{18} - 1 \pmod{19}$. Dolayısıyla $1 \le n \le 18$ ise, $n^6 - 1 \equiv 0$ veya $n^{12} + n^6 + 1 \equiv 0 \pmod{19}$ (her ikisi aynı anda sağlanmaz!!). $n^6 - 1 \equiv 0 \pmod{19}$. O halde $n = 1, 7, 8, 11, 12, 18$. Geriye kalan 12 sayının toplamı: 114.

31.

Çözüm:

$$a_n - 1 = \left(1 - \frac{2}{2n+1}\right) a_{n-1} - \left(1 - \frac{2}{2n-1}\right) = \left(1 - \frac{2}{2n+1}\right) \cdot (a_{n-1} - 1).$$

$a_n - 1 = b_n$ dersek, $b_n = \dfrac{2n-1}{2n+1} \cdot b_{n-1} \rightarrow n = 2, 3, 4, \dots$ için
$\dfrac{b_n}{b_{n-1}} = \dfrac{2n-1}{2n+1}$. Çarparsak, $b_1 = a_1 - 1 = 41$ olduğundan,

$$\frac{b_2}{b_1} \cdot \frac{b_3}{b_2} \cdot \ldots \cdot \frac{b_{20}}{b_{19}} = \frac{3}{5} \cdot \frac{5}{7} \cdot \ldots \cdot \frac{39}{40} \Rightarrow \frac{b_{20}}{b_1} = \frac{3}{41} \Rightarrow b_{20} = 3 \Rightarrow a_{20} = 4$$

32.

Çözüm: İlk (veya son) k sayının toplamı geriye kalan sayıların toplamını bölüyorsa, tüm sayıların toplamını da böler. Bunun tersi de doğrudur: ilk k sayının toplamı tüm sayıların toplamını bölüyorsa, geriye kalan sayıların toplamını da böler. $n = 4$ durumunda sayıları $1, 4, 3, 2$ şeklinde; $n = 5$ durumunda da $1, 4, 5, 2, 3$ şeklinde sıralanır.

$n = 6$ durumunda sayıların $abcdef$ şeklinde sıralanabileceğini varsayalım. Genelliği bozmadan $a + b + c \leq d + e + f$ olduğunu varsayabiliriz. Tüm sayıların toplamı $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21$ olduğundan $a + b + c \mid 21$ olmalı. $a + b + c$ toplamı 1'e, 3'e ve 21'e eşit olamayacağından $a + b + c = 7$. O halde $d + e + f = 14$. Öte yandan $a + b + c + d$ ve $e + f$ toplamlarından biri 21'in böleni olmalıdır. Bu da sadece $d = 7$ durumunda olabilir, fakat sayılarımız arasında 7 yoktur. Çelişki!

$n = 8$ durumunda sayıların $abcdefgh$ şeklinde sıralanabileceğini varsayalım. Yine $a + b + c + d \leq e + f + g + h$ olduğunu varsayabiliriz. $a + b + c + d$ toplamı $1 + 2 + \ldots + 8 = 36$ sayısının böleni olduğundan ve $a + b + c + d \geq 1 + 2 + 3 + 4 = 10$ eşitsizliğinden dolayı iki durum olabilir: 1) $a + b + c + d = 18$ veya 2) $a + b + c + d = 12$.

1) durumunda $e + f + g + h = 18$ olacağından $a + b + c$ ve $f + g + h$ sayıları da 36'nın bölenleri olacak. Bu da sadece $a + b + c = f + g + h = 12$ durumunda, yani $d = e = 6$ durumunda olabilir. Çelişki!

2) durumunda $a + b + c + d + e = 18$ olmak zorunda. O halde $e = 6$ ve $f + g + h = 18$. Bu da sadece $\{f, g, h\} = \{8, 7, 3\}$ durumunda olabilir. Fakat bu durumda sadece $g + h = 15, 11, 10$ olabilir. Bu sayılardan hiçbiri 36'nın böleni olmadığından çelişki elde ediyoruz.

KAAN DENEME

1.

1-) Kenar uzunlukları $n, n+1, n+2$ ise üçgen geniş açılı olduğundan

$$(n+2)^2 > n^2 + (n+1)^2$$

$$\Rightarrow n^2 - 2n - 3 < 0$$

$$(n-3)(n+1) < 0 \Rightarrow n \in (-1,3)$$

$n=1 \Rightarrow 1,2,3$ üçgen belirtmez.

$n=2 \Rightarrow 2,3,4$ geniş açılı üçgen.

Cevap: 1

2.

2-) $2n-1$ tek sayı olduğundan $(n^2+n, 2n-1) = (2n^2+2n, 2n-1)$

$\Rightarrow (n^2+n, 2n-1) = (2n^2+2n, 2n-1) = (3n, 2n-1)$.

$(n, 2n-1) = 1$ olduğundan $(3n, 2n-1) = 3$ olabilir.

$\Rightarrow 2n-1 \equiv 0 \pmod 3 \Rightarrow n \equiv 2 \pmod 3$

n, en büyük 998 dir. $998 \equiv 8 \pmod{11}$

Cevap: 8.

3.

35-) $\frac{1}{x_{n+1}} = \frac{1}{x_n^2+x_n} = \frac{1}{x_n(x_n+1)} = \frac{1}{x_n} - \frac{1}{x_n+1}$

$\Rightarrow \frac{1}{x_n+1} = \frac{1}{x_n} - \frac{1}{x_{n+1}}, \quad n \geqslant 1$

$\frac{1}{x_1+1} = \frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2}$

$\frac{1}{x_2+1} = \frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_3}$

$\vdots$

$\frac{1}{x_{2022}+1} = \frac{1}{x_{2027}} - \frac{1}{x_{2022}}$

$\frac{1}{x_1+1} + \frac{1}{x_2+1} + \dots + \frac{1}{x_{2022}+1} = \frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_{2022}} = 3 - \frac{1}{x_{2022}} < 3$

$x_{2022} > 0$ olduğundan

$2 < 3 - \frac{1}{x_{2022}+1} < 3$

Cevap: A

4.

4-) A ile başlayan 24 kelime

R ile başlayan 12 kelime

Ş ile başlayan 12 kelime

AŞR harfleriyle oluşturulan 3 harfli kelimeler arasında ŞAR 5. sıradadır.

YAŞAR kelimesi $24+12+12+5=53$. sıradadır.

Cevap: 53.

5.

5-) $\overset{\triangle}{ABC}$ ve $\overset{\triangle}{DEC}$ üçgenleri eştir.

$\Rightarrow |AC| = |DC|$

Bu durumda $m(\widehat{CAD}) = 45^\circ$'dir.

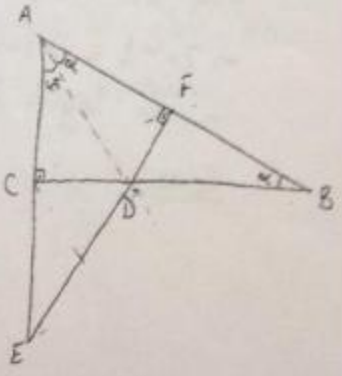
$m(\widehat{ABC}) = \alpha$ olsun.

FD, AB'nin orta dikmesi olduğundan $\overset{\triangle}{ABD}$ ikizkenardır.

$2\alpha = 45^\circ \Rightarrow \alpha = 22{,}5^\circ$

$\Rightarrow m(\widehat{CAB}) = 67{,}5^\circ$

Cevap: 67,5.



2

6.

6-) $(n+1)+(n+2)+ \dots +(n+k) = 1001$

$\Rightarrow kn + \frac{k(k+1)}{2} = 1001 \Rightarrow k(2n+k+1) = 2002 = 2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$

16 çarpandan 8 ayrı yazım gelir.

$k=1$ olamaz $\Rightarrow$ 7 değişik şekilde yazılabilir.

7.

7-) $(2k+1) \cdot 2^k \cdot k! = (2(k+1)-1) \cdot 2^k \cdot k! = 2^{k+1}(k+1)! - 2^k \cdot k!$ $\quad k=1,\dots,9$

$\Rightarrow A = (2^2 \cdot 2! - 2^1 \cdot 1!) + (2^3 \cdot 3! - 2^2 \cdot 2!) + \dots + (2^{10} \cdot 10! - 2^9 \cdot 9!)$

$A = 2^{10} \cdot 10! - 2$

$\Rightarrow A+2 = 2^{10} \cdot 10!$

$\left[\left|\frac{10}{2}\right|\right] = 5$, $\left[\left|\frac{5}{2}\right|\right] = 2$, $\left[\left|\frac{2}{2}\right|\right] = 1 \Rightarrow k$ en fazla $10+5+2+1 = 18$ olur.

Cevap: 18.

8.

8-) $A = abcd$, $B = efgh$ ise

$d+h \leq 9 \Rightarrow d+h+x=9$, $d \geq 0, h \geq 0, x \geq 0$, $\binom{9+3-1}{3-1} = \binom{11}{2} = 55$ durum

(c,g) ve (b,f) çiftleri için de aynı durum geçerlidir.

$a+e \leq 9$, $a,e \geq 1 \Rightarrow a' = a-1 \geq 0$, $e' = e-1 \geq 0$, $y \geq 0$ için

$a'+e'+y = 9-2 = 7 \Rightarrow \binom{7+3-1}{3-1} = \binom{9}{2} = 36$ durum.

Cevap: $36 \cdot 55^3$.

9.

9-) Çemberde kuvvet formülünden

$6 \cdot 6 = 9 \cdot |ED| \Rightarrow |ED| = 4$

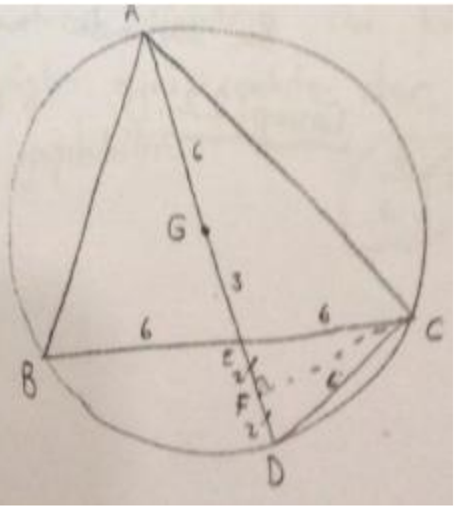
C'den ED'ye dik inersek

$|EF| = |FD| = 2$ olur.

$\Rightarrow |FC| = 4\sqrt{2}$

$\Rightarrow A(ABC) = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 4\sqrt{2} = 36\sqrt{2}$

Cevap: $36\sqrt{2}$.



10.

10-) $(2x-1)(3y+2) = 13$

$\left.\begin{array}{cc} 1 & 13 \\ 13 & 1 \end{array}\right\}$ çözüm yok

$\left.\begin{array}{cc} -1 & -13 \\ -13 & -1 \end{array}\right\}$ 2 çözüm.

Cevap: 2.

11.

11-) $20! \cdot x = \dfrac{20!}{2! \cdot 18!} + \dfrac{20!}{4! \cdot 16!} + \ldots + \dfrac{20!}{18! \cdot 2!}$

$$= \binom{20}{2} + \binom{20}{4} + \ldots + \binom{20}{18}$$

$$= \left[\binom{19}{1} + \binom{19}{2}\right] + \left[\binom{19}{3} + \binom{19}{4}\right] + \ldots \left[\binom{19}{17} + \binom{19}{18}\right]$$

$$= 2^{19} - 2$$

$$\Rightarrow \frac{2^{19}-2}{x} = 20!$$

$$\left[\left|\frac{20}{5}\right|\right] = 4.$$

Cevap: 4.

12.

12-) Beyaz bilyelerin sayısı en az 33'tür, daha az olsaydı geri kalan bilyelere 2 beyaz bilye ekler ve en az 70 bilye içeren ve bunlardan yalnızca 2'sinin beyaz olduğu bir grup elde ederdik.

Benzer şekilde siyah bilyelerin sayısı en az 45'tir.

Bu durumda mavi bilyelerin sayısı en fazla $100-33-45=22$'dir.

Cevap: 22.

13.

13-) $|BD| = x$, $|CD| = y$ ise

$$\frac{12+x}{x} = \frac{27-y}{y}$$

$$\Rightarrow 12y + xy = 27x - xy$$

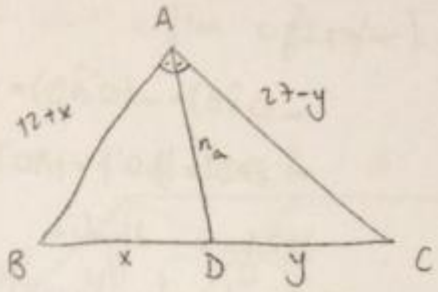
$$n_a^2 = (12+x)(27-y) - xy$$

$$= 12.27 \underbrace{-12y + 27x - 2xy}_{0}$$

$$= 12.27$$

$$\Rightarrow n_a = 18$$

Cevap: 18.



14.

14-) $\phi(100) = 40 \Rightarrow 321^{2019} \equiv 21^{50.40+19} \equiv 121^{19} \equiv 11^{38} \pmod{100}$

$x \equiv 11^{38} \Rightarrow 21x = 121x = 11^{40} \equiv 1 \pmod{100}$

$\Rightarrow 21x \equiv 201 \pmod{100} \Rightarrow 7x \equiv 67 \equiv 567 \pmod{100}$

$\Rightarrow x \equiv 81 \pmod{100}$

Cevap: 81.

15.

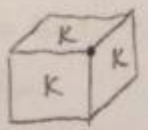
15-) $A_p = \left(\frac{x^p + y^p + z^p}{3}\right)^{1/p}$ dersek, denklem, $A_3 = A_5$ şeklindedir.

Buradan $x = y = z$ olmalı, yani çözüm yoktur.

Cevap: 0.

16.

16-) Karşı yüzler farklı renkte olursa, simetrik iki köşe için bu köşeleri oluşturan yüzler aynı renkte olur. Bu durumda tek boyama yapılabilir.



Cevap: 1.

17.

17-)

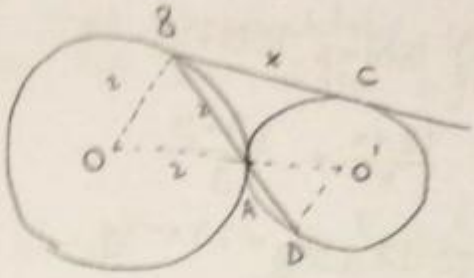
$m(O\hat{A}B) = m(O'\hat{A}D) = 60°$

$\Rightarrow |AD| = |DO'| = |AO'| = \frac{3}{2}$

$|BC| = x$ diyelim.

Çemberde kuvvetten

$x^2 = 2\cdot\left(2+\frac{3}{2}\right) = 7 \Rightarrow x = \sqrt{7}$



Cevap: $\sqrt{7}$.

18.

18-) $(0,0,0)$ bir çözümdür. $(x_0, y_0, z_0) \neq (0,0,0)$ bir çözüm olsun. Bu durumda $x_0^2 + y_0^2 \equiv 0 \pmod 3 \Rightarrow x_0 = 3x_1,\ y = 3y_1$.

$\Rightarrow 9x_1^2 + 90y_1^2 = 3z_0^2 \Rightarrow z_0 = 3z_1$

$\Rightarrow x_1^2 + 10y_1^2 = 3z_1^2 \Rightarrow 3^n \mid x_0, y_0, z_0 \quad \forall n = 1, 2, \ldots$ olamaz.

$\Rightarrow (0,0,0)$ tek çözümdür.

Cevap: 1.

19.

19-) $a_k = a_1 a_2 \cdots a_{k-1} + 1$, $k = 2, 3, \ldots, 10$.

$$\Rightarrow \frac{a_k}{a_1 \cdot a_2 \cdots a_k} = \frac{a_1 \cdot a_2 \cdots a_{k-1} + 1}{a_1 a_2 \cdots a_k}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{a_k} = \frac{1}{a_1 a_2 \cdots a_{k-1}} - \frac{1}{a_1 \cdot a_2 \cdots a_k}$$

$$\frac{1}{a_2} = \frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_1 a_2}$$

$$\frac{1}{a_3} = \frac{1}{a_1 a_2} - \frac{1}{a_1 a_2 a_3}$$

$$\vdots$$

$$\frac{1}{a_{10}} = \frac{1}{a_1 a_2 \cdots a_9} - \frac{1}{a_1 a_2 \cdots a_{10}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \cdots + \frac{1}{a_{10}} = \frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_1 a_2 \cdots a_{10}}$$

$$= 7 - 3 = 4.$$

Cevap: 4.

20.

20-) Yapılan işlemler sonucu aynı basamaktaki rakamların pariteleri değişmez (tekse tek olur, çiftse çift olur).

Cevap: 767778

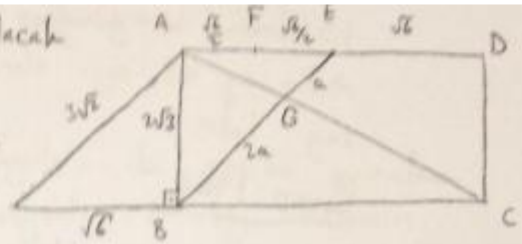
21.

21-) BC'yi uzatıp AH // EB olacak şekilde H noktası alalım.

Bu durumda $|HB| = \sqrt{6}$ olur.

$A\hat{E}G$ ve $C\hat{B}G$ benzerdir.

$|EG| = a$ dersek $|BG| = 2a$ olur.



$|BE| = |AH| = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 + (\sqrt{6})^2} = 3\sqrt{2}$

$|AG| = \frac{|AC|}{3} = 2 \Rightarrow |AB|^2 = |AG|^2 + |BG|^2$

$\Rightarrow A\hat{E}G$ dik üçgendir. Bu durumda $|FG| = |AF| = |EF| = \frac{\sqrt{6}}{2}$ olur.

Cevap: $\frac{\sqrt{6}}{2}$.

22.

22-) $(x+2)^3 \equiv 0 \pmod{36}$

$\Rightarrow (x+2)^3 \equiv 0 \pmod{4} \Rightarrow x \equiv 0,2 \pmod{4}$,

$(x+2)^3 \equiv 0 \pmod{9} \Rightarrow x \equiv 1,4,7 \pmod{9}$

$\Rightarrow 3 \cdot 2 = 6$ çözüm vardır.

Cevap: 6.

23.

23-) Cauchy eşitsizliğinden

$$\left(\frac{2}{a}+3b+\frac{5}{3c}\right)\left(50a+\frac{12}{b}+15c\right) \geq \left(\sqrt{\frac{2}{a}\cdot 50a}+\sqrt{3b\cdot\frac{12}{b}}+\sqrt{\frac{5}{3c}\cdot 15c}\right)^2$$

$$= (10+6+5)^2 = 441.$$

Eşitlik durumu için $a=\frac{1}{5}$, $b=2$, $c=\frac{1}{3}$ alınabilir.

Cevap: 441.

24.

24-) $45 \cdot 46 > 2012 \Rightarrow \{45, 46, \ldots, 2012\}$ kümesi koşulu sağlar; bu küme 1968 elemanlıdır.

Öte yandan $\{44, 45, 44\cdot 45\}, \{43, 46, 43\cdot 46\}, \ldots, \{2, 87, 2\cdot 87\}$ kümelerinin her birinden en fazla 2 eleman seçilebilir.

$\Rightarrow$ En az 43 sayı elenecek. Geriye en fazla $2011-43=1968$ sayı kalır.

Cevap: 1968.

25.

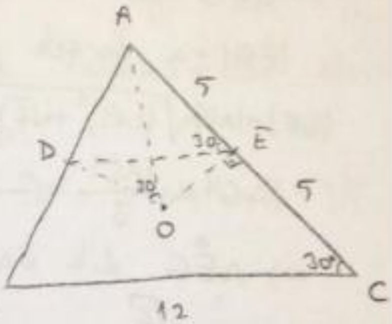
25-) AEOD çemberseldir

$\Rightarrow m(A\hat{E}D) = m(A\hat{O}D) = 30^\circ$

$DE \parallel AB \Rightarrow m(A\hat{C}B) = m(A\hat{E}D) = 30^\circ$

$|BC| = 2|DE| = 12$

$\Rightarrow A(A\hat{B}C) = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 12 \cdot \frac{1}{2} = 30$



Cevap: 30.

26.

26-) $(3-1)(1+3+3^2+\ldots+3^n) \equiv 0 \pmod{143}$

$\Rightarrow 3^{n+1} - 1 \equiv 0 \pmod{143}$

$$\left.\begin{array}{l} 3^{n+1} \equiv 1 \pmod{11} \Rightarrow n+1 = 5k \\ 3^{n+1} \equiv 1 \pmod{13} \Rightarrow n+1 = 3t \end{array}\right\} \Rightarrow n+1 = 15s$$

$n+1 = 105$ sağlar. $\Rightarrow n = 104$.

Cevap: 5.

27.

27-) $\frac{5}{2} = x+y = x + \frac{y}{4} + \frac{y}{4} + \frac{y}{4} + \frac{y}{4} \geq 5\sqrt[5]{\frac{xy^4}{4^4}}$

$\Rightarrow xy^4 \leq 2^{-5+8} = 8$

Eşitlik durumu için $x = \frac{1}{2}$, $y = 2$ alınabilir.

Cevap: 8.

28.

28-) Koşulu sağlamayan sayıları iki gruba ayıralım.

a) İçinde 0 ve 5 bulunmayanlar: 8^4 sayı bulunur.

b) İçinde 5 olan ve sadece tek rakamlardan oluşan sayılar: $5^4 - 4^4$ sayı bulunur.

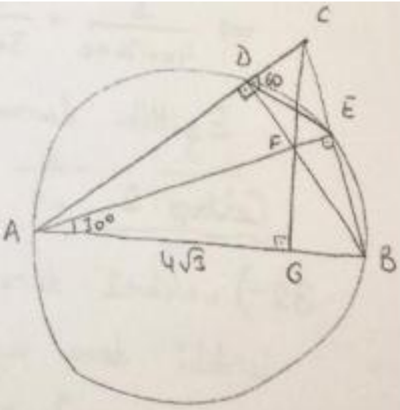
Toplamdan çıkarırsak $9000 - 8^4 - 5^4 + 4^4 = 4535$ sayı istediğimiz koşulu sağlar.

Cevap: 4535.

c

29.

29-)



$$m(A\hat{D}E) = 180° - m(E\hat{D}C)$$
$$= 180° - 60° = 120°.$$

$$m(A\hat{D}B) = m(A\hat{E}B) = 90°.$$

$$\Rightarrow m(E\hat{A}B) = \frac{m(\widehat{EB})}{2} = m(B\hat{D}E)$$
$$= 120° - 90° = 30°$$

F, $A\hat{B}C$'nin diklik merkezidir.

$$\Rightarrow m(A\hat{G}C) = 90°.$$

$$\Rightarrow |AF| = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot |AG| = \frac{2}{\sqrt{3}} 4\sqrt{3} = 8.$$

Cevap: 8.

30.

30-)
$$\left.\begin{aligned} x &\equiv 1,3 \pmod 4 \\ x &\equiv 2 \pmod 5 \\ x &\equiv 5 \pmod 6 \end{aligned}\right\} \Rightarrow x \equiv 17, 47 \pmod{60}$$

$$\left.\begin{aligned} x \equiv 17 \pmod{60} &\longrightarrow 17 \text{ çözüm} \\ x \equiv 47 \pmod{60} &\longrightarrow 16 \text{ çözüm} \end{aligned}\right\} 33 \text{ çözüm}$$

Cevap: 33.

31.

31-)
$$\left(\frac{1}{4a+3b+c}+\frac{1}{3a+b+4d}+\frac{1}{a+4c+3d}+\frac{1}{4b+3c+d}\right)\cdot\underbrace{\left(\begin{aligned}&4a+3b+c+3a+b+4d\ + \\ &a+4c+3d+4b+3c+d\end{aligned}\right)}_{8(a+b+c+d)=8}$$

$$\underset{\text{Cauchy}}{\geq} \left(\sqrt{1}+\sqrt{1}+\sqrt{1}+\sqrt{1}\right)^2 = 16$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4a+3b+c}+\frac{1}{3a+b+4d}+\frac{1}{a+4c+3d}+\frac{1}{4b+3c+d} \geq 2.$$

Eşitlik durumu için $a=b=c=d=\frac{1}{4}$ alınabilir.

Cevap: 2.

32.

32-) $n=4k+2$ durumunda dilimleri sıralarsak tek numaralı dilimlerdeki dama sayısı başlangıçta $2n+1$'dir. Her hamlede bunların sayısı ya 2 azalır, ya 2 artar, ya da değişmez ve dolayısıyla her zaman tek sayı olacak. Damaların hepsi aynı haneye toplansaydı tek numaralı dilimlerdeki dama sayısı ya 0 ya da $4k+2$ olacaktı, bu da mümkün değil.

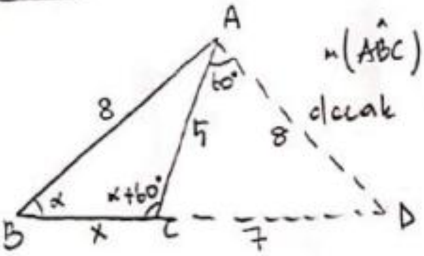
$n=4k, 4k+1, 4k+3$ durumlarında tüm damaların aynı dilime toplanabileceği kolayca kontrol edilir. $\Rightarrow n=1011, 1012, 1013$

Cevap: 3.

TUĞÇE DENEME ÇÖZÜMLER

1.

Çözüm :



$m(\widehat{ABC})=\alpha$ ve $m(\widehat{ACB})=60+\alpha$ olsun. BC üzerinde $m(\widehat{CAD})=60°$ olacak şekilde D noktası alalım. $m(\widehat{ADB})=\alpha$, $|AB|=|AD|$ olur. ACD üçgeninde kosinüs teoremi uygulanırsa

$$|CD|^2=5^2+8^2-2\cdot 5\cdot 8\cdot \cos 60°$$

$|CD|=7$ olur.

BAD ikizkenar üçgeninde (Stewart Teoreminin ikizkenar üçgene uyarlanmış hali)

$$5^2=8^2-7\cdot x$$

$x=\frac{39}{7}$ bulunur.

2.

Çözüm: $n=1$ için çözüm yoktur. Bu yüzden $d(n)\geq 2$ dir.
$d(n)=2$ olamaz çünkü bu durumda n asal sayı olur ve verilen denklem $1+n=n+2+1$ şeklinde kısaltılır. Bu nedenle $d(n)\geq 3$ tür. $1=D_1<D_2<\dots<D_d=n$, n'nin pozitif tam bölenleri ise denklem şu şekilde yazılabilir;

$$1+\sum_{i=2}^{d(n)-1} D_i + n = n + d(n) + 1$$

$D_i\geq 2$, $i\in\{2,3,\dots,d(n)-1\}$ olduğunda $d(n)=\sum_{i=2}^{d(n)-1} D_i \geq [d(n)-2]\cdot 2$ olur. Buradan $d(n)\geq 2d(n)-4 \Rightarrow 4\geq d(n)$ bulunur. Dolayısıyla $3\leq d(n)\leq 4$ olacaktır. $d(n)=3$ için p asal sayı olmak üzere $n=p^2$ tipindedir. Bu durumu orijinal denklemde yerine yazalım. $1+p+p^2=p^2+3+1 \Rightarrow p=3$ ve $n=9$ bulunur.

$d(n)=4$ için iki durum vardır.

a) p ve q farklı iki asal sayı olmak üzere $n=p\cdot q$ tipindedir. Bu durumu orijinal denklemde yerine yazalım.
$1+p+q+p\cdot q=p\cdot q+4+1 \Rightarrow p+q=4$ olur. Çelişki.

b) p asal sayı olmak üzere $n=p^3$ tipindedir. Bu durumu orijinal denklemde yerine yazalım. $1+p+p^2+p^3=p^3+4+1 \Rightarrow$
$p(p+1)=4$ olur. Çelişki

Bu yüzden $n=9$ tek çözümdür.

Cevap: E

3.

A) 0

Çözüm: Denklemlerin çözümlü olabilmesi için $x \cdot y \cdot z \neq 0$ olmalıdır.
Denklemleri $x^3yz = z^2 - 2y^2$ (1), $y^3zx = x^2 - 2z^2$ (2) ve
$z^3xy = y^2 - 2x^2$ (3) şeklinde yazabiliriz. Denklemleri taraf
tarafa topladığımızda;
$xyz(x^2+y^2+z^2) = -(x^2+y^2+z^2) \Rightarrow (x^2+y^2+z^2)(xyz+1) = 0$ elde edilir.
$x^2+y^2+z^2 > 0$ olduğundan $xyz = -1$ (4) bulunur. (4). denklemi (1)., (2). ve (3).
denklemlerde kullanırsak $-x^2 = z^2 - 2y^2$; $-y^2 = x^2 - 2z^2$ ve $-z^2 = y^2 - 2x^2$
elde edilir. Bu son üç denklemden de $x^2 = y^2 = z^2$ bulunur.
Dolayısıyla $x \cdot y \cdot z = -1$ olduğundan $(x, y, z) = (-1,-1,-1), (1,1,-1), (1,-1,1)$
ve $(-1,1,1)$ üçlüleri bulunup 4 tane (x,y,z) üçlüsü vardır.

Cevap: D

4.

Çözüm: Yandaki şekilde 3×3 boyutlu tablonun haneleri numaralandırılmıştır. 2×2 boyutlu karalerin sol üst köşeleri 1, 2, 4 ve 5 numaralı haneler olabilir.
$i = 1, 2, 4, 5$ için A_i ile sol üst köşesi i olan 2×2 boyutlu karenin hanelerinin kırmızı olduğu durumlar kümesini gösterelim. O halde istenmeyen durumlar;

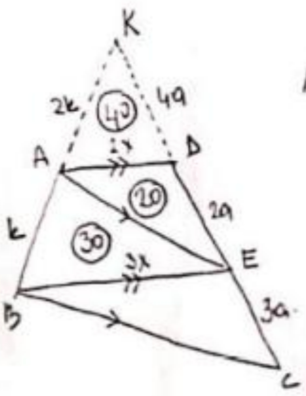
1	2	3
4	5	6
7	8	9

$A = A_1 \bigcup A_2 \bigcup A_4 \bigcup A_5$ kümesinin elemanı olacaktır.
İçerme- dışarma formülünden;
$|A| = |A_1| + |A_2| + |A_4| + |A_5| - \sum |A_i \bigcap A_j| + \sum |A_i \bigcap A_j \bigcap A_k| - |A_1 \bigcap A_2 \bigcap A_4 \bigcap A_5|$.
Böylece,
$|A| = 4 \cdot 2^5 - (4 \cdot 2^3 + 2 \cdot 2^2) + 4 \cdot 2 - 1 = 95$ ve aradığımız sayı $512 - 95 = 417$'dir.

Cevap: B

5.

Çözüm



$AD \parallel BE$ olduğundan $\dfrac{A(\overset{\triangle}{ADE})}{A(\overset{\triangle}{ABE})} = \dfrac{|AD|}{|BE|} = \dfrac{2}{3}$ olur.

$AB \cap CD = K$ olsun. $\overset{\triangle}{AKD} \sim \overset{\triangle}{BKE}$ ve $\overset{\triangle}{AKE} \sim \overset{\triangle}{BKC}$ benzerlikleri kullanılarak $\dfrac{|AK|}{|AB|} = 2$ ve $|KD|:|DE|:|EC| = 4:2$ bulunur. $Alan(\overset{\triangle}{AKD}) = 40$ ve $Alan(\overset{\triangle}{BEC}) = 45$ olur.

6.

$(2022, n) = d$ dersek $2022 = d.a$ ve $n = d.x$ olup a ile x aralarında asaldır. $2022.n = d^2.a.x$ ve $2022 + n = d(a+x)$ olduğu için $d.a.x$'in $(a+x)$'e tam bölünmesi gerekir. a ve x aralarında asal olduğu için $a.x$ ile $(a+x)$'de aralarında asaldır. O zaman d sayısı $(a+x)$'e tam bölünmelidir. Buradan $d \geq a+x$ dir. 2022'nin pozitif tam bölenleri 1, 2, 3, 6, 337, 674, 1011, 2022 dir. $2022 = d.a$ eşitliğinden tüm durumları

inceleyelim;

$a = 1$, $d = 2022 \Rightarrow a+x \mid 2022 \Rightarrow a+x > 1$ olduğundan 7 durum,

$a = 2$, $d = 1011 \Rightarrow a+x \mid 1011 \Rightarrow a+x > 2$ olduğundan 3 durum,

$a = 3$, $d = 674 \Rightarrow a+x \mid 674 \Rightarrow a+x > 3$ olduğundan 2 durum,

$a = 6$, $d = 337 \Rightarrow a+x \mid 337 \Rightarrow a+x > 6$ olduğundan 1 durum

vardır. Buradan 13 tane pozitif n tam sayısı bulunur

Cevap: A

7.

$a_n = 2x_n - 1$ olsun. x_n'i yerine yazalım.

$a_n = 2x_n - 1 = 2(2x_{n-1} \cdot x_{n-2} - x_{n-1} - x_{n-2} + 1) - 1 = (2x_{n-1} - 1)(2x_{n-2} - 1)$ olup.

$a_n = a_{n-1} \cdot a_{n-2}$ bağıntısı elde edilir. $2 \cdot x_{3n} - 1 = a_{3n}$ dir

Hedef a_{3n}'in tam kare olmasıdır. $a_0 = 2a - 1$, $a_1 = 2.2 - 1 = 3$

$a_2 = 3 \cdot (2a-1)$ ve $a_3 = 9(2a-1)$ olduğundan $2a-1$'in tam kare olması gerekir. Seçenekleri denediğimizde $2.61 - 1 = 121 = 11^2$, $2.85 - 1 = 169 = 13^2$, $2.113 - 1 = 225 = 15^2$ ve $2.481 - 1 = 961 = 31^2$ olup $2.223 - 1 = 445$ olup tam kare değildir.

Cevap: D

8.

A) 6

k negatif olmayan tam sayı olması şartıyla 2^k tipindeki sayılar ardışık pozitif tam sayıların toplamı şeklinde yazılamaz. Bunun dışındaki her pozitif tam sayıyı ardışık pozitif tam sayıların toplamı şeklinde yazmak mümkündür.

Şimdi bunu ispat edelim;

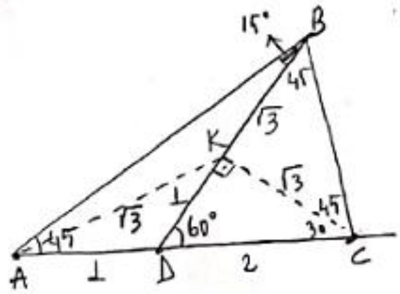
$n = m + (m+1) + (m+2) + \dots + (m+r) = \frac{(2m+r)}{2}(r+1)$ olduğundan $(2m+r)$ ve $(r+1)$ mod 2'de farklı çıkar ve bu çarpanlardan biri birden büyük tek sayıdır. Dolayısıyla $n \neq 2^k$ bulunur.

Sonuç olarak aranan sayılar 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024 olup 11 tanedir.

Cevap: D

9.

Çözüm:



$|AD|=1$ ve $|CD|=2$ olsun. C'den AB'ye inilen dikme ayağı K olmak üzere, $|KD|=1$ ve $|KC|=\sqrt{3}$ olur. ($30°, 60°, 90°$ üçgeni)
$\overset{\triangle}{ADK}$'ninin ikizkenar ve $30°, 30°, 120°$ üçgeni olduğu görülür. $|AK|=\sqrt{3}$, $m(B\hat{A}K)=15°$ olduğu görülür. $\overset{\triangle}{AKB}$'ni ikizkenardır. $|AK|=|BK|=\sqrt{3}$ ve $|BK|=|KC|=\sqrt{3}$, $\overset{\triangle}{BKC}$'ni ikizkenar olur.
$m(A\hat{C}B)=m(D\hat{C}K)+m(B\hat{C}K)=30°+45°=75°$

10.

Çözüm: 10! sayısını $10! = 2^8 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 7$ şeklinde yazabiliriz ve 10! sayısının $(8+1)\cdot(4+1)\cdot(2+1)\cdot(1+1) = 270$ tane pozitif tam böleni vardır. $d_1, d_2, \ldots, d_{270}$ artan biçiminde numaralandırırız ve küçük olan d_1'den başlarız, $1 \le k \le 270$ ve $d_k \cdot d_{271-k} = 10!$. Bu nedenle,

$$\frac{1}{d_k+\sqrt{10!}} + \frac{1}{d_{271-k}+\sqrt{10!}} = \frac{d_k + d_{271-k} + 2\sqrt{10!}}{\sqrt{10!}(d_k + (d_{271} - k)) + 2\cdot 10!} = \frac{1}{\sqrt{10!}}$$

d_{271-k}

Sonuç olarak istenilen toplam;

$$\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{270}\left(\frac{1}{d_k+\sqrt{10!}} + \frac{1}{d_{271-k}+\sqrt{10!}}\right) = \frac{1}{2}\cdot 270 \cdot \frac{1}{\sqrt{10!}} = \frac{3}{16\sqrt{7}}$$

11.

Vieta formüllerinden $a+b+c=2$, $ab+ac+bc=3$ tür.

$(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2(ab+ac+bc) \Rightarrow 4 = a^2+b^2+c^2+6 \Rightarrow$

$a^2+b^2+c^2=-2$ dir. Şimdi değeri istenen ifadeyi buna göre düzenleyelim;

$$\frac{1}{a(-2-2a^2)}+\frac{1}{b(-2-2b^2)}+\frac{1}{c(-2-2c^2)}$$ bulunur. Bu ifadenin herhangi bir terimi üzerinde çalışalım.

$$A=\frac{-1}{2a(1+a^2)}=\frac{-1}{2(a^3+a)} \Rightarrow a^3=2a^2-3a+4$$ olduğundan $A=\dfrac{-1}{2(2a^2-2a+4)}$

$$A=\frac{-1}{4(a^2-a+2)}$$ bulunur. $\dfrac{a^3-2a^2+3a-4}{a^2-a+2}=a-1-\dfrac{2}{a^2-a+2}$ olduğundan

$$A=\frac{-1(a-1)}{4(a^2-a+2)(a-1)}=\frac{1-a}{8}$$ bulunur. O zaman bizden istenen

$$\frac{1-a}{8}+\frac{1-b}{8}+\frac{1-c}{8}=\frac{3-(a+b+c)}{8}=\frac{1}{8}$$ bulunur.

Cevap: D

12.

32 16

(a,b,c,d,e,f), 210 sayısının farklı olması gerekmeyen bölenlerinin bir permütasyonu olsun. Önce $a.b.c.d.e.f > 210^3$ eşitsizliğini sağlayan (a,b,c,d,e,f) permütasyonlarının sayısını bulalım.

$a.b.c.d.e.f > 210^3 \Leftrightarrow \frac{210}{a}.\frac{210}{b}.\frac{210}{c}.\frac{210}{d}.\frac{210}{f} < 210^3$

olduğundan bu permütasyonların sayısı $a.b.c.d.e.f < 210^3$ koşulunu sağlayan permütasyonların sayısına eşittir.

$a.b.c.d.e.f = 210^3 = 2^3.3^3.5^3.7^3$ koşulunu sağlayan permütasyonların sayısı $\binom{3+4-1}{4-1}^4 = \binom{6}{3}^4$ olur. Dolayısıyla

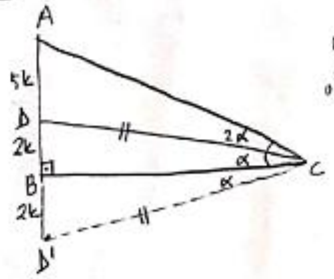
$210 = 2.3.5.7$'nin pozitif bölen sayısı $(1+1)(1+1).(1+1).(1+1)=16$ olduğundan $a.b.c.d.e.f > 210^3$ koşulunu sağlayan permütasyonların sayısı $\frac{(16)^6-\binom{6}{3}^4}{2}$'dir. Bu sonucu asıl probleme uygulayalım. f'nin alabileceği 16 değer var. Bunlardan sadece birini, $f=210$'u alırsak $a.b.c.d.e > 210^2$ elde ederiz ve böylece aranan sayı $\frac{1}{16}.\frac{(16)^6-\binom{6}{3}^4}{2}$ olur.

Seçeneklere göre düzenlersek $\frac{16^6-20^4}{32}$ bulunur.

Cevap: A

13.

Çözüm:



$m(B\hat{C}D)=\alpha$, $m(A\hat{C}D)=2\alpha$, $|BD|=2k$ ve $|AD|=5k$ olsun. DBC üçgeninin D' noktası kullanılarak eş üçgeni çizilirse $|BD'|=2k$, $m(B\hat{C}D')=\alpha$ ve $|DC|=|CD'|$ olur.

CD'nin ACD' üçgeninde açıortay olduğu görülürse

$\frac{|DD'|}{|AD|}=\frac{|CD'|}{|AC|}=\frac{|CD|}{|AC|}=\frac{4}{5}$ bulunur.

14.

...

$i=1,2,\ldots,s$ için $p_i \neq 2,3$ sayıları birbirinden farklı asal sayılar iken, $2^a \cdot 3^b \cdot p_1^{a_1} \cdot p_2^{a_2} \cdot \ldots \cdot p_s^{a_s}$ olsun. Eğer t sayısı $6k \mp 1$ formunda n sayısının böleni ise t sayısı aynı zamanda $p_1^{a_1} \cdot p_2^{a_2} \cdot \ldots \cdot p_s^{a_s}$ sayısının da bölenidir. (Çünkü t sayısı 2 ya da 3'e bölünemez.) Öte yandan $p_1^{a_1} \cdot p_2^{a_2} \cdot \ldots \cdot p_s^{a_s}$ sayısının tüm bölenleri de $6k \mp 1$ formundadır. Dolayısıyla $g(n)+h(n)$ pozitif tam bölenlerinin toplamı $p_1^{a_1} \cdot p_2^{a_2} \cdot \ldots \cdot p_s^{a_s}$ sayısına eşittir. Eğer $g(n)$ ve $h(n)$ sayılarından biri tek biri çift sayı ise $g(n)+h(n)$ sonucu tektir.

Bu yüzden, $p_1^{a_1} \cdot p_2^{a_2} \cdot \ldots \cdot p_s^{a_s}$ sayısını bölen sayısı da tektir. Dolayısıyla $(a_1+1) \cdot (a_2+1) \cdot \ldots \cdot (a_s+1)$ çarpımı tek sayıdır. Yani $a_1, a_2, \ldots, a_s$ sayıları çifttir. O halde $p_1^{a_1} \cdot \ldots \cdot p_s^{a_s}$ tam karedir. Yani $n=2^a \cdot 3^b \cdot m^2$ şeklindedir. $200=2^3 \cdot 5^2$, $27=3^3 \cdot 1^2$, $150=2 \cdot 3 \cdot 5^2$, $49=7^2$ olduğundan bu sayılar için $g(n)+h(n)$ tektir. Dolayısıyla $g(n)$ ve $h(n)$'den biri tek, diğeri çifttir. Sadece $105=3 \cdot 35$ için 35 bir tam kare olmadığından $g(n)+h(n)$ çifttir. Dolayısıyla ikisi de tek veya ikisi de çifttir.

Cevap: C

15.

$$a_{n+1} = \frac{1+a_n}{1-a_n} \Rightarrow a_{n+2} = \frac{1+\frac{1+a_n}{1-a_n}}{1-\frac{1+a_n}{1-a_n}} = \frac{-1}{a_n} \quad \text{bulunur}$$

$$a_{n+4} = \frac{-1}{a_{n+2}} = \frac{-1}{\frac{-1}{a_n}} = a_n \Rightarrow a_{n+4} = a_n \quad \text{bulunur.}$$

olduğunu anladığımıza göre,

$$a_{2020} = a_{2016} = \ldots = a_4 \quad \text{olduğuna}$$

$$a_1 = 2 \Rightarrow a_2 = \frac{1+2}{1-2} = -3 \Rightarrow a_3 = \frac{1-3}{1+3} = \frac{-1}{2} \Rightarrow a_4 = \frac{1-\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}} = \frac{1}{3} \quad \text{bulunur}$$

$$a_{2020} = a_4 = \frac{1}{3} \quad \text{olacaktır.}$$

Cevap: D

16.

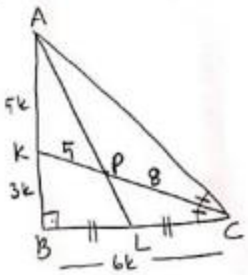
Sayımız abcd olsun.

$a+b+c+d=32$ olmak üzere $a+a'=9$, $b+b'=9$, $c+c'=9$ ve $d+d'=9$ olsun. Taraf tarafa topladığımızda $32+a'+b'+c'+d'=36$

$\Rightarrow a'+b'+c'+d'=4$ olur. Bu denklemin çözüm sayısı $\binom{7}{3}=35$ bulunur. Cevap: E

17.

Çözüm:



Menalaus teoremi uygulanarak

$\frac{AK}{AB} \cdot \frac{BL}{LC} \cdot \frac{CP}{PK} = 1$'den $\frac{AK}{KB} = \frac{5}{3}$ bulunur.

$|AK|=5k$ ve $|KB|=3k$ alınırsa açıortay teoreminden

$|AC|=10k$, $|BC|=6k$ olur.

$\widehat{KBC}$'ninde pisagor teoreminden $(3k)^2+(6k)^2=13^2$

$k=\frac{13}{3\sqrt{5}}$ bulunur.

$A(ABC) = \frac{6k \cdot 8k}{2} = 24k^2 = 24 \cdot \left(\frac{13}{3\sqrt{5}}\right)^2 = \frac{1352}{15}$ olur.

18.

$P(n)=15.n$ olduğundan $n=15.k$ tipinde olmalıdır. k asal olursa $15.k$ nın pozitif tam bölenlerinin çarpımı

$1.3.5.15.k.15k=15.n \Rightarrow k=\frac{1}{15}$ bulunur. Gelişki

O zaman tek durum $k=1$ dir. Dolayısıyla $n=15$ bulunur.

$P(15)=1.3.5.15=15.n$ sağlar. n'nin rakamları toplamı

$1+5=6$ bulunur. Cevap: D

19.

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{1}{9}$

Faydalı eşitsizlik gereği $\frac{a^2}{1}+\frac{b^2}{1}+\frac{c^2}{1} \geq \frac{(a+b+c)^2}{3} = \frac{1}{3}$ bulunur.

Aritmetik-Geometrik Ortalama eşitsizliği gereği

$\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{a.b.c} \Rightarrow \frac{1}{27} \geq abc$ dir. Buradan

$2(a^2+b^2+c^2)-15abc \geq 2.\frac{1}{3}-\frac{15}{27}=\frac{3}{27}=\frac{1}{9}$ olup

$a=b=c=\frac{1}{3}$ için eşitlik sağlanır. Cevap: C

20.

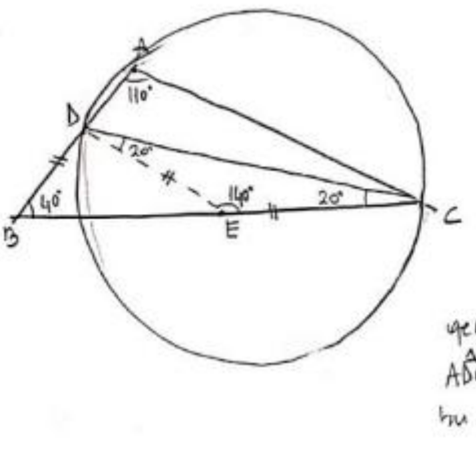
A) 3 B) 4 C) ·

Hareketlerin yapılış sırası sonucu etkilemeyecek şekilde, en üstteki 3 ampule dokunarak bütün ampuller söndürülür. Aslında en üst sıradaki ampüller 3 kez durum değiştirecek diğer ampüller 1 kez durum değiştirecektir. Daha az hamle ile tüm ampüllerin söndürülemeyeceği açıktır.

Cevap: A

21.

Çözüm:



[BC] üzerinde m(CD̂E)=20° olacak şekilde E noktası alınırsa

|BD| = |DE| = |EC| olur.

ADEC dörtgeninde |DE|=|EC| ve 2m(DÂC)+m(DÊC)=360° olduğundan E merkezli ve A,D,C noktalarından geçen bir çember çizilebilir. Bu çember AD̂C'nin çevrel çemberi olur. |DE|=|EC| bu çemberin yarıçapıdır. |BD|=6 bulunur.

22.

A) 3

İlk denklemden z'nin çift olduğu görüldükten sonra
ikinci denklemden x'in tek olduğu görülür. İlk denkleme
bakıldığında x'in y ve z'den büyük olduğu anlaşılıyor.
Dolayısıyla $13x < 4x + 3x + 29 \Rightarrow 6x < 29 \Rightarrow x < 5$ bulunur
$x = 1$ olması $x > \max(y, z)$ olması ile çelişir. O zaman
$x = 3$ tür. Dolayısıyla $39 = 4y + 3z + 29 \Rightarrow 10 = 4y + 3z$
denkleminde $y = 1$ ve $z = 2$ bulunur. $x + y + z = 3 + 1 + 2 = 6$ bulunur.

Cevap = D

23.

A) 19

$a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ negatif olmayan tam sayılar olması şartıyla
$P(x) = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + a_3 \cdot x^3 + a_4 \cdot x^4 + \dots + a_n x^n$ biçiminde tanımlıdır.

$P(10) = a_0 + a_1 \cdot 10 + a_2 \cdot 10^2 + a_3 \cdot 10^3 + a_4 \cdot 10^4 + \dots + a_n \cdot 10^n = 331633$

$P(-10) = a_0 - a_1 \cdot 10 + a_2 \cdot 10^2 - a_3 \cdot 10^3 + a_4 \cdot 10^4 \dots + a_n \cdot (-10)^n = 273373$

olduğuna göre $n > 4$ için $a_n = 0$ olduğu görülür.

$$\frac{P(10) + P(-10)}{2} = a_0 + 100a_2 + 10000a_4 = 302503 \Rightarrow a_0 = 3,\ a_2 = 25,\ a_4 = 30$$

bulunur.

$$\frac{P(10) - P(-10)}{2} = 10a_1 + 1000a_3 = 29130 \Rightarrow a_1 = 13,\ a_3 = 29$$

bulunur.

$P(1) = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 3 + 13 + 25 + 29 + 30 = 100$ bulunur.

Cevap: B

24.

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) Her iki saatte de kırmızı olamaz

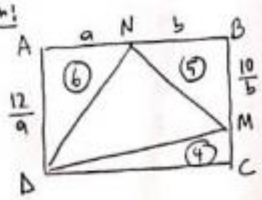
Çözüm: Trafik ışığının 12 : 05' te kırmızı olduğu veriliyor. 12 : 05 ile 12 : 12 saatleri arasında birer dakikalık periyotlarda trafik ışığının durumu aşağıda verilmiştir. Periyot 2 dakika olur ise iki, 3 dakika olur ise üç durum vardır.

period	12:05	12:06	12:07	12:08	12:09	12:10	12:11	12:12
1 min	kırmızı	yeşil	kırmızı	yeşil	kırmızı	yeşil	kırmızı	yeşil
2 min	kırmızı	kırmızı	yeşil	yeşil	kırmızı	kırmızı	yeşil	yeşil
2 min	kırmızı	yeşil	yeşil	kırmızı	kırmızı	yeşil	yeşil	kırmızı
3 min	kırmızı	kırmızı	kırmızı	yeşil	yeşil	yeşil	kırmızı	kırmızı
3 min	kırmızı	kırmızı	yeşil	yeşil	yeşil	kırmızı	kırmızı	kırmızı
3 min	kırmızı	yeşil	yeşil	yeşil	kırmızı	kırmızı	kırmızı	yeşil

Bu altı durumun üçünde saat 12 : 12 de lamba kırmızıdır. Bu bize 12.08 ve 12 : 09 da iki seçenek verir. Bunlar; kırmızı-kırmızı ve yeşil-yeşil durumlarıdır.

25.

Çözüm:



$|AN| = a$ ve $|BN| = b$ alınırsa dik üçgenlerin alanları yardımıyla $|AD| = \frac{12}{a}$ ve $|BM| = \frac{10}{b}$ bulunur.

$$Alan(N\hat{D}M) = (a+b)\cdot\frac{12}{a} - (6+5+4)$$
$$= 12 + 12\cdot\frac{b}{a} - 15$$
$$= 12\frac{b}{a} - 3$$ ve $X = \frac{b}{a}$ için $A(N\hat{D}M) = 12X - 3$ olur

$$Alan(D\hat{M}C) = \frac{|MC|\cdot|DC|}{2} = \frac{(a+b)\cdot\left(\frac{12}{a} - \frac{10}{b}\right)}{2}$$

$8 = (a+b)\left(\frac{12}{a} - \frac{10}{b}\right)$ $\left[\frac{b}{a} = X,\ \frac{a}{b} = \frac{1}{X}\right]$ için $6X^2 - 3X - 5 = 0$ olur. Diskriminant yardımıyla $X = \frac{3 \pm \sqrt{129}}{3}$ ve $Alan = \sqrt{129}$ bulunur.

26.

Çözüm: Önce p ve q'nun tek sayı olduğunu varsayalım.Bu durumda, $p^{q+1} + q^{p+1}$ toplamındaki üslerin her ikiside çifttir. Buradanda her iki terim mod 4'te 1'e eşittir. Yani toplam mod 4 'te 2'ye eşittir fakat asla bir kare olamaz. Şimdi p ve q'nun çift sayı olduğunu varsayalım.Bu durumda, p ve q her ikiside 2'ye eşittir. Buradan $p^{q+1} + q^{p+1} = 2^3 + 2^3 = 16 = 4^2$ bulunur yani şartlar sağlanır. Son olarak iki sayıdan birinin tek diğerinin çift olduğunu varsayalım. O zaman rastgele bir a tamsayısı için $p = 2$ ve $2^{q+1} + q^3 = a^2$ bulunur. b'yi pozitif tamsayı olarak alalım ve $q + 1 = 2b$'yi yazalım.Bu durumda eşitlik $2^{2b} + q^3 = a^2$ yada benzer şekilde

$$q^3 = a^2 - 2^{2b} = (a - 2^b)(a + 2^b)$$

haline gelir. Eşitliğin sağ tarafındaki her iki faktör q'nun kuvveti olmalıdır. Mesela, $l > k \geq 0$ olduğu durumda $a - 2^b = q^k$ ve $a + 2^b = q^l$ olur. Her iki faktör q^k'ya bölünebilir aynı zamanda farkları da q^k'ya bölünebilir. Yani $q^k \mid 2\cdot 2^b = 2^b + 1$. Ancak q tek asal sayıdır, yani 2'nin kuvvetlerinden herhangi birini bölen q'nun sadece bir tane kuvveti vardır,o da 1'dir. Yani $k = 0$. Buradan $q^3 = a + 2^b$ ve $a - 2^b = 1$ bulunur. Yani $q^3 = (2^b + 1) + 2^b = 2^{b+1} + 1$'dir. Buradan;

2^{b+1}

$$2^{b+1} = q^3 - 1 = (q-1)(q^2 + q + 1)$$

bulunur. Ancak $q^2 + q + 1 \equiv 1 \pmod 2$ ve dahası $q^2 + q + 1 > 1$ yani bu 2' nin kuvveti olamaz.Çelişki. Sonuç olarak $(p, q) = (2, 2)$ tek çözümdür, yani $p + q = 4$'tür.

Cevap=C

27.

$a = 2021$ olsun.

$$\frac{(a+1)^4 + 4 \cdot a^4}{a^2 + (2a+1)^2} - \frac{(a-1)^4 + 4 \cdot a^4}{a^2 + (2a-1)^2} =$$

$$\frac{a^4 + 4a^3 + 6a^2 + 4a + 1 + 4a^4}{a^2 + 4a^2 + 4a + 1} - \frac{a^4 - 4a^3 + 6a^2 - 4a + 1 + 4a^4}{a^2 + 4a^2 - 4a + 1} =$$

$$\frac{5a^4 + 4a^3 + 6a^2 + 4a + 1}{5a^2 + 4a + 1} - \frac{5a^4 - 4a^3 + 6a^2 - 4a + 1}{5a^2 - 4a + 1} =$$

$$\frac{a^2(5a^2 + 4a + 1) + (5a^2 + 4a + 1)}{5a^2 + 4a + 1} - \frac{a^2(5a^2 - 4a + 1) + (5a^2 - 4a + 1)}{5a^2 - 4a + 1} =$$

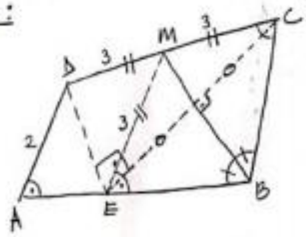
$a^2 + 1 - (a^2 + 1) = 0$ bulunur. Cevap: A

28.

a'nın yanına iki eleman seçelim. $\binom{5}{2} = 10$
$\{2,3,4,5\}$'in görüntülerini belirleyelim. $3^4 = 81$ dir.
Ancak 81 durumun içinde görüntü kümesinin 1 veya 2
elemanlı olduğu durumlar var. Dolayısıyla 4 tane elemanın
her birinin görüntüsünün a ve diğer iki elemandan
yalnız biri olduğu durumları çıkarmalıyız. Bu durum
$2^4 \cdot 2 = 32$ dir. Fakat hepsinin görüntüsünün a olduğu
durumu iki kere çıkardık. Dolayısıyla 1 eklemeliyiz.
$10 \cdot (81 - 32 + 1) = 500$ bulunur. Cevap: C

29.

Çözüm :



$[CD]$'nin orta noktası M olmak üzere $|AD|=2$, $|DM|=|MC|=3$ alalım.

C'nin, BM'ye göre yansıması olan nokta E olmak üzere $E \in [AB]$'dir.

EMCB dörtgeni deltoiddir. $|MC|=|ME|$ ve $m(\widehat{MCB})=m(\widehat{MEB})$ olur. Buradan $|DM|=|MC|=|ME|$ olduğundan $m(\widehat{DEC})=90°$, $DE \parallel MB$ ve $m(\widehat{DAB})=m(\widehat{MEB})$, $DA \parallel ME$ olur.

$AD \parallel ME$ ve $DE \parallel MB$ olduğundan $\overset{\triangle}{ADE} \sim \overset{\triangle}{EMB}$ dir.

Benzerlik oranı $\frac{|AD|}{|ME|}=\frac{|AE|}{|EB|}=\frac{2}{3}$ bulunur.

$|AE|=2k$ $|EB|=|BC|=3k$ alınırsa $\frac{|AB|}{|BC|}=\frac{5}{3}$ olur.

30.

Dört tam sayının hepsinin bölenlerinden biri 1'dir. Bu sayılara $x, x+1, x+2$ ve $x+3$ dersek 2 ya x ile x+2'nin ya da x+1 ile x+3 ün bölenidir. Dolayısıyla bu dört tam sayının zaten en fazla $6.4-3-1=20$ tane pozitif tam sayı böleni vardır. Demek ki başka aynı çarpan bulunmamaktadır. Dolayısıyla 3 bu dört tam sayıdan sadece birinin bölenidir. Bu sayı ya x+1 ya da x+2'dir. 27 birinin böleni ve o sayının bu dört tam sayıdan sadece 6 tane pozitif tam sayı böleni olduğu için bu sayı $3^5=243$ olmalıdır. O zaman $x+1=243$ veya $x+2=243$ olabilir. Fakat $x+2=243$ ise $x=241$ olur. Çelişki elde edilir. Çünkü 241 asal olduğundan 6 farklı pozitif tam sayı böleni olamaz. Demek ki $x=242$, $x+1=243$, $x+2=244$ ve $x+3=245$ tir. $242=2.11^2$, $243=3^5$, $244=2^2.61$ ve $245=5.7^2$ dir.

Tüm bölenleri inceleyelim; 1, 2, 3, 4, 5, 7, 9, 11, 22, 27, 35, 49, 61, 81, 121, 122, 242, 243, 244 ve 245 olup 20 tanedir.

cevap: D

31.

A) 12 B) 13 ...

Öncelikle $(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2(ab+ac+bc)$ olduğundan

$36 = a^2+b^2+c^2+2.9 \Rightarrow a^2+b^2+c^2=18$ bulunur.

Cauchy-Shwarz eşitsizliğinden $(a+4b+7c)^2 \leq (1+16+49).(a^2+b^2+c^2)$

$\Rightarrow (a+4b+7c)^2 \leq 66.18=1188<35^2$ bulunur.

$n < a+4b+7c-18 \Rightarrow n \leq 34-18 \Rightarrow n\leq 16$ bulunur.

Buna göre n'nin en büyük değeri 16 dır.

Örnek durum için $a=\frac{1}{2}$, $b=\frac{22-\sqrt{84}}{8}$ ve $c=\frac{22+\sqrt{84}}{8}$

alınabilir.

Cevap: E

32.

Çözüm: Her öğrencinin doğu cevap sayısı faklı olmak üzere toplam doğru cevap sayısı en az $0+1+\ldots+19=190$'dır. Her soru en fazla 3 öğrenci tarafından doğru çözüldüğüne göre en az $\frac{190}{3}=63\frac{1}{3}$ tane soru olmalıdır. Yani en az 64 soru vardır.

Cevap: B

ÜMMEHAN DENEME ÇÖZÜMLER

1.

yetersiz

$a^2+c^2=3b^2$ ve $c^2=2ab$ denklemlerinden $a^2+2ab-3b^2=0$ denklemi elde edilir. $(a-b).(a+3b)=0$ olduğundan $a=b$ dir. Buradan $c^2=2a^2$ elde edilir. $c=\sqrt{2}a$ olacağından ABC üçgeninin kenar uzunlukları a, a ve $a\sqrt{2}$ bulunur. Bu yüzden üçgenin iç açı ölçüleri $45°, 45°, 90°$ dir. Cevap: C

2.

$x=\frac{12-y}{3y+2} \Rightarrow 3x=\frac{36-3y}{3y+2} \Rightarrow 3x=-1+\frac{38}{3y+2} \Rightarrow 3y+2=\mp1, \mp2, \mp19, \mp38$

olacağından y tam sayısı $-1, 0, -7, 12$ değerlerini alırken x tam sayısı $-13, 6, -1, 0$ değerlerini alır. Buna göre, (x,y) ikilileri $(-13,-1), (6,0), (-1,-7), (0,12)$ olmak üzere 4 tanedir. Cevap: C

3.

$x=\frac{[\![x^2]\!]+1}{2}$ olduğuna göre t tam sayı olmak üzere $x=\frac{t}{2}$ dir.

$\frac{t}{2}=\frac{[\![\frac{t^2}{4}]\!]+1}{2} \Rightarrow t-1=[\![\frac{t^2}{4}]\!] \Rightarrow t-1\le\frac{t^2}{4}<t \Rightarrow 4t-4\le t^2<4t \Rightarrow$

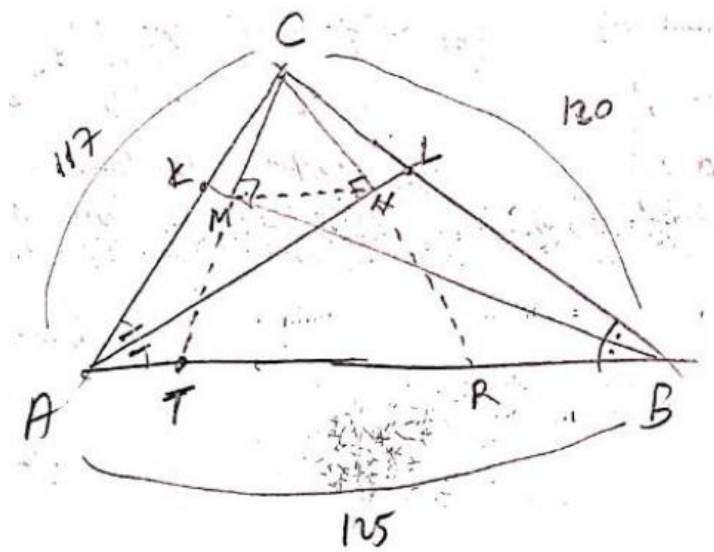
$0\le t^2-4t+4<4 \Rightarrow 0\le(t-2)^2<4 \Rightarrow t-2=0,\mp1 \Rightarrow t=2,3,1$ değerlerini alır. O zaman $x=\frac{1}{2}$, $x=1$, $x=\frac{3}{2}$ değerlerini alır. Dolayısıyla $1+\frac{1}{2}+\frac{3}{2}=3$ bulunur. Cevap: C

4.

numaralandırılmıştır.

Düzgün dokuzgeni ABCDEFGHJ ve üzerindeki numaraları da $a, b, c, d, e, f, g, h, j$ alalım. 1'den 9'a kadar olan sayıları mod 3'te kalan sınıflarına ayıralım. $\{1,4,7\}$, $\{2,5,8\}$, $\{3,6,9\}$ kümeleri elde edilir. $a=1$ alalım. $b+c\equiv 2 \pmod 3$ olacağından $\{b,c\}=\{4,7\}$ olursa $b+c+d\equiv 0 \pmod 3$ imkansızdır. Dolayısıyla b ve c iki ayrı kümenin elemanı olmalıdır. Birisi $\{3,6,9\}$'un elemanı iken diğeri $\{2,5,8\}$'in elemanı olmalı. Bu tepe noktalarının numaraları toplamının üçe bölünebilmesi için kalan sınıflarına göre elimizdeki durumlar $(1,2,0,1,2,0,1,2,0)$ ve $(1,0,2,1,0,2,1,0,2)$ dir. Bu iki dizilimde (d,g) ikilisi için 2 durum, (b,e,h) ve (c,f,j) üçlüleri için 6'şar durum vardır. Dolayısıyla cevap $2\cdot 2\cdot 6\cdot 6=144$ olur. Cevap: D

5.



$[CM$ ve $[CN$, $[AB]$'nı sırasıyla T ve R noktalarında kessin. Tepe noktaları B ve A olan TBC ve RAC ikizkenar üçgenleri elde edildi. $|AC|=|AR|=117$ ve $|BC|=|BT|=120$ bulunur. Dolayısıyla $|AT|=5$, $|RB|=8$ bulunur. Buradan $|TR|=125-13=112$ olup $[MN]$, CTR üçgeninde orta taban olduğundan $|MN|=56$'dır.

Cevap: B

6.

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5

$\frac{a}{a-4} + \frac{2}{a} = \frac{a^2+2a-8}{a.(a-4)}$ ifadesinin tamsayı olması için a^2+2a-8, $a.(a-4)$'e tam bölünmeli. Dolayısıyla bu ifade a'ya tam bölünür. O zaman a sayısı 8'in bölenleri olabilir. $a = \mp 1, \mp 2, \mp 4, \mp 8$ değerlerini denediğimizde bunlardan sadece $a=2$ ve $a=-4$ değerleri çözümdür. Cevap:B

7.

$\frac{n+m}{n-m} = 1 + \frac{2m}{n-m}$ olur. Bu ifadenin en büyük olması için $n-m$'nin en az olması gerekmektedir. Verilen sınırlara göre bu değer $n-m=2$ için mümkündür. $m=49$ ifadeyi en büyük yapar. Buradan $1 + \frac{2m}{n-m} = 1+m = 1+49 = 50$ bulunur.

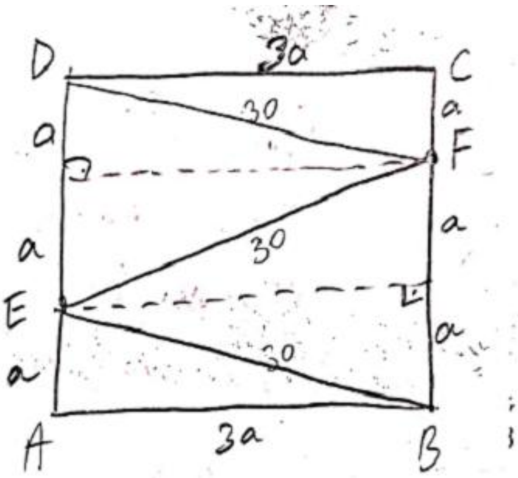
Cevap:D

8.

Çözüm 9'un katı olan $A<B<C$ koşulunu sağlayan en büyük sayı 567 dir. $\{5,6,7,8,9\}$ kümesinden 3 eleman $\binom{5}{3}=10$ farklı şekilde seçilir. Bunlardan en büyüğü 567 olduğundan geriye 9 tane sayı kalır.

Cevap:D

9.



DFE ve FEB ikizkenar üçgenlerinden karenin bir kenar uzunluğunu 3a bulduk. Pisagor bağıntısı gereği

$a^2+(3a)^2=30^2 \Rightarrow 10a^2=900 \Rightarrow a^2=90$

Alan(ABCD) $= 9a^2 = 9.90 = 810$ dur.

Cevap: E

10.

a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) 4

$2a+1-2b$ ifadesi tek sayı olduğundan $|2a+1-2b| \geq 1$ dir. Dolayısıyla

$a+2b-b^2 \geq \sqrt{2a+a^2+1} = \sqrt{(a+1)^2} = a+1 \Rightarrow 2b-b^2 \geq 1 \Rightarrow 0 \geq b^2-2b+1 \Rightarrow$

$(b-1)^2 \leq 0 \Rightarrow b=1$ bulunur. Buna göre, $a+2-1=\sqrt{2a+a^2+|2a-1|}$ bulunur.

$a=0$ için son denklem sağlanır. $a>0$ ise $a+1=\sqrt{a^2+4a-1} \Rightarrow$

$a^2+2a+1=a^2+4a-1 \Rightarrow a=1$ bulunur. O zaman tüm (a,b) ikilileri

$(0,1)$ ve $(1,1)$ ikilileridir. Cevap: C

11.

$x=0$ için $f_1(0)=f_2(0)=b$ olduğundan $b \leq 0$ değerleri için f_1 ve f_2 fonksiyonlarının pozitif olamayacağı görülür. $b>0$ için f_1 ve f_2 $f_1(x)+f_2(x)=2x^2+2b$ olduğundan fonksiyonlarından en az biri pozitif olur. Dolayısıyla b'nin en geniş değer aralığı $(0,\infty)$ aralığıdır.

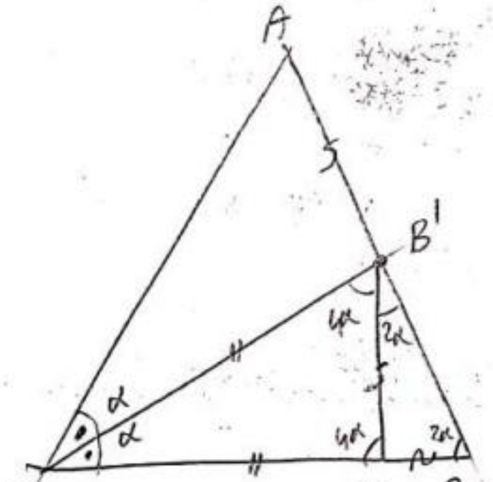
Cevap: D

12.

... Cumartesi günü ...
toplayacak. Aynı şekilde pazar günü de izciler ikili gruplar halinde dağa çıkacaklar. Fakat izci başkanı ikilileri öyle ayarlamalı ki cumartesi günü eş olan ikililer pazar günü eş olmasın. Buna göre izci başkanı bu seçimi kaç farklı yolla yapar?

Çözüm: izcileri A, B, C, D, E ve F diye isimlendirelim. A, birinci gün eşini 5 farklı yolla belirler. İkinci gün eşini 4 farklı yolla belirler. İkinci gün A'ya eş olan ilk gün için eşini 3 farklı yolla belirler. Örneğin ilk gün (A,B) eş iken, ikinci gün (A,C) eş olsun. (C,D) ilk gün eş olsun. Şimdi D'nin ikinci gün eşi 2 farklı yolla belirlenir. Son ikililer tek türlü belirlenir. Buna göre izci başkanı bu seçimi $5.4.3.2 = 120$ farklı yolla yapar. Cevap: A

13.



[BC] üzerinde $|BB'|=|BM|$ olacak şekilde M noktası alalım. Dolayısıyla $|AB'|=|MC|$ olmaktadır. Açıortay teoreminden

$$\frac{|AB'|}{|B'C|}=\frac{|AB|}{|BC|}=\frac{|AC|}{|BC|}$$ olur. Buradan

$$\frac{|MC|}{|B'C|}=\frac{|AC|}{|BC|}$$ bulunur. Dolayısıyla C açısının kolları orantılı olduğundan $\overset{\triangle}{MCB'} \sim \overset{\triangle}{ACB}$ dir.

$|AB|=|AC|$ olduğundan $|MB'|=|MC|$ dir.

Açıları uygun bir şekilde isimlendirdiğimizde $9\alpha=180 \Rightarrow \alpha=20^\circ$ bulunur.

$m(\hat{A})+m(\hat{B})=180-m(\hat{C})=180-2\alpha=180-40=140$ bulunur. Cevap: B

14.

$1 \leq a \leq 6$ değerlerini alırken ilginç dörtlü $(a, a+i, a+j, a+k)$ biçimindedir. $0 < i < j < k$ ve $i+j < k$ olması gerekirken aynı zamanda $4 \leq k \leq 9$ olur. $k = 4, 5, 6, 7, 8$ ve 9 değerleri için (i, j, k) üçlülerinin sayısı sırasıyla $1, 2, 4, 6, 9$ ve 12 dir. Ayrıca a nın alabileceği değer sayısı $10-k$ olduğundan ilginç dörtlü sayısı $6.1 + 5.2 + 4.4 + 3.6 + 2.9 + 1.12 = 80$'dir.

Cevap: E

15.

$|a_1 + a_2 + \cdots + a_k| + |a_{k+1} + \cdots a_{101}| \leq |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_{101}| = 1$ eşitsizliğinden 101'den küçük en az bir k pozitif tamsayısı için $|a_1 + a_2 + \cdots + a_k| = |a_{k+1} + \cdots + a_{101}| \leq \frac{1}{2}$ bulunur. Buradan $|a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \cdots + 101a_{101}| \leq |\underbrace{a_1 + a_2 + \cdots + a_{101}}_{0}| + |a_2 + a_3 + \cdots + a_{101}| + \cdots + |a_{101}| \leq 100 \cdot \frac{1}{2} = 50$ bulunur. Örnek durum için $a_{101} = \frac{1}{2}$, $a_1 = \frac{-1}{2}$ ve $a_2 = a_3 = \cdots = a_{100} = 0$ alınabilir.

Cevap: C

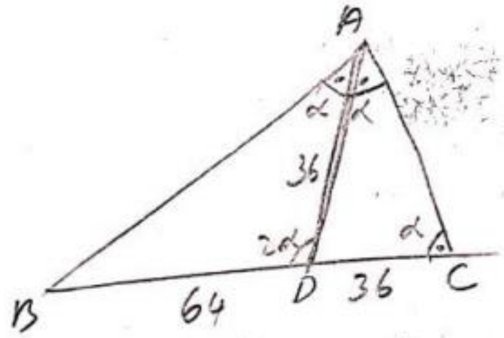
16.

Dış bükey bir n-genin köşegen sayısının 1000'den az olması durumunda n'nin en büyük değeri sorulmakta. Dolayısıyla $\frac{n.(n-3)}{2} < 1000 \Rightarrow n(n-3) < 2000$ olur. Bu eşitsizliği sağlayan en büyük n değeri 46 dır.

$\frac{n.(n-3)}{2} = \frac{46.43}{2} = 989$ bulunur.

Cevap:D

17.



$|BC| = 100$ görülür.

$m(B\hat{A}C) = m(B\hat{D}A) = 2\alpha$ ve $m(A\hat{C}B) = m(B\hat{A}D) = \alpha$

olduğundan $\overset{\triangle}{ABD} \sim \overset{\triangle}{CBA}$ (A.A.) dır.

Dolayısıyla $\dfrac{|AB|}{|BC|} = \dfrac{|BD|}{|AB|} \Rightarrow |AB| = \sqrt{|BC| \cdot |BD|}$

$\Rightarrow |AB| = \sqrt{100 \cdot 64} = 80$ bulunur.

Yine aynı benzerlikten $|AC| = \dfrac{|AD| \cdot |AB|}{|BD|} = \dfrac{36 \cdot 80}{64}$

$|AC| = 45$ bulunur.

Cevap: B

18.

$(m,n) = d$ olsun. $(m_1, n_1) = 1$ olmak üzere $m = d.m_1$ ve $n = d.n_1$ dir.
$[m,n] = d.m_1.n_1$ olur. Dolayısıyla $d + d.m_1.n_1 = 101 \Rightarrow d(1 + m_1.n_1) = 101$
101 asal sayı olduğu için $d = 1$ ve $m_1.n_1 = 100$ bulunur.
Aralarında asal (m_1, n_1) ikilileri $(1,100)$, $(4,25)$, $(25,4)$ ve $(100,1)$
olacağından bütün koşulları sağlayan 4 ikili vardır. Cevap: D

19.

a) 553 b) 555 c) 557 d) 559 e) 561

$r = x_1.x_3.x_5 + x_2 x_4 x_6$ ve $S = x_1.x_2.x_3 + x_2.x_3.x_4 + x_3.x_4.x_5 + x_4.x_5.x_6 + x_5.x_6.x_1$ olsun.

Aritmetik-Geometrik ortalama eşitsizliğinden

$$r + S = (x_1 + x_4)(x_2 + x_5)(x_3 + x_6) \leq \left(\frac{(x_1 + x_4) + (x_2 + x_5) + (x_3 + x_6)}{3}\right)^3 = \frac{1}{27}$$ olur.

Buradan $S_{max} = \dfrac{1}{27} - \dfrac{1}{540} = \dfrac{19}{540} = \dfrac{p}{q}$ bulunur. $p + q = 19 + 540 = 559$ dur.

Ayrıca $x_1 = x_3 = \dfrac{3}{10}$, $x_2 = \dfrac{19}{60}$, $x_4 = \dfrac{1}{30}$, $x_5 = \dfrac{1}{60}$ ve $x_6 = \dfrac{1}{30}$ çözümü veren

değerlerdir. Cevap: D

20.

2 çember en fazla iki noktada kesişir. $\binom{3}{2} \cdot 2 = 6$

2 doğru en fazla bir noktada kesişir. 1

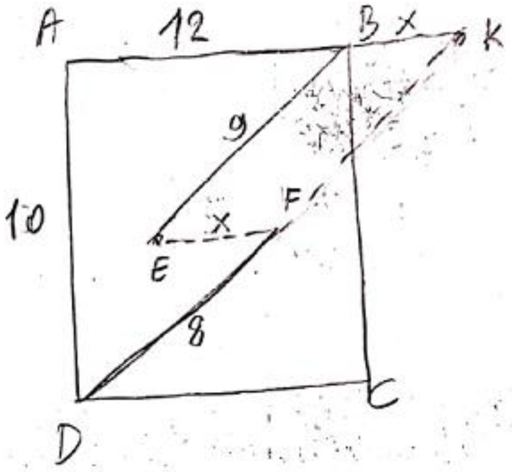
1 çember ile 1 doğru en fazla iki noktada kesişir.

$\binom{3}{1}\binom{2}{1} \cdot 2 = 3.2.2 = 12$

Dolayısıyla $12+6+1=19$ noktada kesişir.

Cevap: B

21.



$DF \cap AB = \{K\}$ olacak şekilde $[DF]$ ve $[AB]$ uzatıldığında EFKB paralelkenarı elde edildi. $|DK| = 17$ oldu. Pisagor bağıntısı gereği $(x+12)^2 + 10^2 = 17^2 \Rightarrow$

$(x+12)^2 = 7.27 \Rightarrow x = 3\sqrt{21} - 12$

Buradan $m=3$, $n=21$ ve $p=12$ dir.

$m+n+p = 36$ olur.

Cevap: C

22.

Emrah x birim içecek alsın ve bunun y birimini içsin. Geriye $(x-y)$ birim kalacak. Eğer Emrah $\frac{x}{2}$ birim satın alıp bunun $2y$ birimini içseydi geriye $\left(\frac{x}{2} - 2y\right)$ birim kalacaktı.

O zaman $\frac{2}{9} \cdot (x-y) = \frac{x}{2} - 2y \Rightarrow 4x - 4y = 9x - 36y \Rightarrow 32y = 5x$

$\Rightarrow \frac{y}{x} = \frac{5}{32} = \frac{m}{n}$

$\Rightarrow m+n = 37$ bulunur.

Cevap: C

23.

Polinomda $x=y=z=1$ verilirse $3P(1)+P(3)=3P(2)$ elde edilir. $3.5+P(3)=3.14 \Rightarrow P(3)=27$ bulunur.
$P(x)=2x^2+3x$ polinomu orijinal denklemi sağlar.
Cevap: C

24.

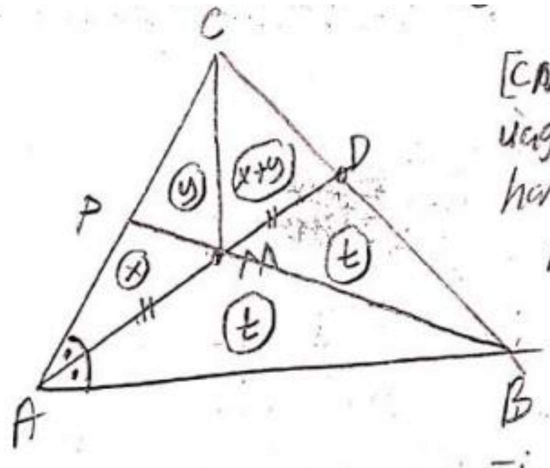
Verilenleri bir tablo ile değerlendirelim.

	F	A
K	x	
E	x-3	16-x

$\underbrace{x + x-3}_{}$ $2x-3=11 \Rightarrow 2x=14 \Rightarrow x=7$ dir.

Cevap: D

25.



[CM]'nı çizelim ve elde edilen üçgenlerin içerisinde alanlarını harflendirelim. $Alan(A\hat{B}M)=Alan(B\hat{M}D)=t$, $Alan(A\hat{P}M)=x$, $Alan(C\hat{P}M)=y$ ve $Alan(C\hat{M}D)=x+y$ olsun

Açıortay teoremi gereği $\dfrac{|AB|}{|AC|}=\dfrac{|DB|}{|CD|}=\dfrac{20}{11}=\dfrac{2t}{2(x+y)} \Rightarrow$

$20x+20y=11t$ elde edilir. $\dfrac{|PM|}{|MB|}=\dfrac{x}{t}=\dfrac{y}{x+y+t}$ dir. Buradan

$x.(x+y+t)=t.y \Rightarrow x\left(\dfrac{11t}{20}+t\right)=t.y \Rightarrow x.\dfrac{31}{20}=y \Rightarrow \dfrac{|CP|}{|CA|}=\dfrac{y}{x}=\dfrac{31}{20}$

olur. $m=31$ ve $n=20$'den $m+n=51$ dir
Cevap: C

26.

$p=a.b.c.d+e.f.g$ sayısının ilk ve ikinci teriminin çarpanlarını iki kümeye ayıralım. $A=\{a,b,c,d\}$ ve $B=\{e,f,g\}$ olsun. $p>2$ ve asal olduğundan 2,4,6 sayıları aynı kümede olmalı. $p>3$ ve asal olduğundan 3,6 sayıları aynı kümede olmalı. Dolayısıyla $A=\{2,3,4,6\}$ olurken $B=\{1,5,7\}$ olur. Buna göre $p=2\cdot3\cdot4\cdot6+1\cdot5\cdot7=179$ asal sayısı elde edilir.

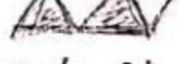
cevap: B

27.

$x+y^2=xy+1 \Rightarrow x-xy=1-y^2 \Rightarrow x(1-y)=(1-y).(1+y)$ denkleminde $y=1 \Rightarrow x=5$ dir. $y\neq 1 \Rightarrow x=1+y$ dir. İkinci denklemde yerine yazalım. $(1+y).y=4+y \Rightarrow y^2=4 \Rightarrow y=\mp 2$ bulunur. $y=2 \Rightarrow x=3$ ve $y=-2 \Rightarrow x=-1$ bulunur. Buna göre tüm x ve y değerlerinin toplamı $1+5+2+3+(-2)+(-1)=8$ bulunur.

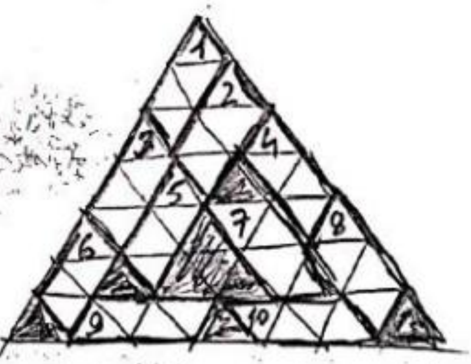
Cevap: E

28.

Küçük üçgenleri şekilde görüldüğü gibi siyah ve beyaza boyayalım. Her paralelkenarda  2 siyah ve 2 beyaz üçgen olmalıdır. Toplamda 21 beyaz üçgen olduğundan paralelkenarların sayısı

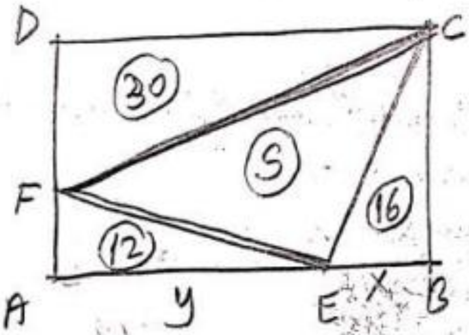
$\left[\left|\frac{21}{2}\right|\right]=10$'u aşamaz.

Örnek durum gösterelim



cevap: B

29.



$|EB| = x$ ve $|AE| = y$ olsun.

$|DC| = x+y$, $|BC| = \frac{32}{x}$ ve $|AF| = \frac{24}{y}$ dolayısıyla

$|FD| = \frac{32}{x} - \frac{24}{y}$ olur.

$Alan(FDC) = 30 = \left(\frac{32}{x} - \frac{24}{y}\right)\cdot(x+y)\cdot\frac{1}{2} \Rightarrow 30 = 16 - 12\frac{x}{y} + 16\frac{y}{x} - 12 \Rightarrow 13 = 8\cdot\frac{y}{x} - \frac{6x}{y}$

$\frac{y}{x} = t$ dersek $8t - \frac{6}{t} = 13 \Rightarrow 8t^2 - 13t - 6 = 0 \Rightarrow (8t+3)(t-2) = 0 \Rightarrow t = 2$

Yani $y = 2x$ bulunur. $Alan(ABCD) = 58 + S = \frac{32}{x}\cdot 3x = 96 \Rightarrow S = 38$ bulunur.

Cevap: B

30.

Herhangi bir n pozitif tam sayısı için

$(10n+3)(10n+7) = 100n^2 + 100n + 21 \equiv 21 \pmod{100}$ Buradan

$x = (3\cdot 7)\cdot(13\cdot 17)\cdot(23\cdot 27)\cdot \ldots \cdot(2013\cdot 2017) \equiv 21^{202} \pmod{100}$

Euler teoremi gereği $\varphi(100) = 40$ olduğundan $(21^{40})^5\cdot 21^2 \equiv 441 \equiv 41 \pmod{100}$

olduğundan x'in onlar basamağı 4 olur.

Cevap: C

31.

$x_k = x$ diyelim. $x^2 + (k+2)\cdot x + k^2 + k + 1 = f(x)$ parabolünün

Tepe noktasını bulalım $r = \frac{-(k+2)}{2}$, $f(r) = \left[\frac{-(k+2)}{2}\right]^2 - \frac{(k+2)^2}{2} + k^2 + k + 1 \Rightarrow$

$f(r) = \frac{3}{4}\cdot k^2$ bulunur. Dolayısıyla her x reel sayısı için

$x^2 + (k+2)x + k^2 + k + 1 \geq \frac{3k^2}{4} \Rightarrow x^2 + (k+2)x + \left(\frac{1}{2}k + 1\right)^2 \geq 0 \Rightarrow$

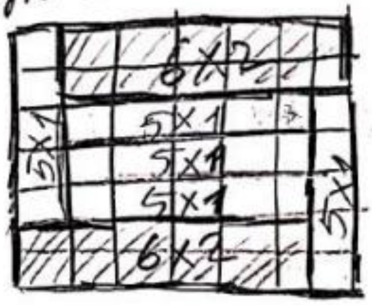
$\left(x + \frac{1}{2}k + 1\right)^2 \geq 0$ bulunur. Dolayısıyla sadece $x_k = -\frac{1}{2}k - 1$ bulunur.

Cevap: A

32.

$n=5$ ve $n=10$ kolayca döşenir. $n=71$ durumunda 65×65, 65×6 ve 6×65 kolayca 5×1 lerle döşenir. Kalan 6×6 lık kısım kolayca 6×2 lerle döşenir. $n=98$ durumunda 80×80, 80×18 ve 18×80 kolayca 5×1 lerle döşenir. Kalan 18×18 lik kısım kolayca 6×2 lerle döşenir. $n=7$ durumunda ise a tane 5×1 lik ve b tane 6×2 lik fayans kullandığımızı varsayalım.

$5a + 12.b = 49$ denkleminin sadece $a=5$ ve $b=2$ için doğal sayılarda çözümü vardır. Örnek durumu gösterelim.

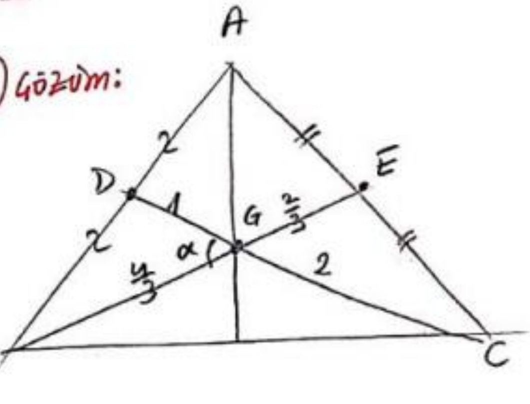


cevap: E

UMUT DENEME ÇÖZÜMLER

1.

1) Çözüm:



$$Alan(GBD) = \frac{1\cdot\frac{4}{3}}{2}\cdot\sin\alpha = \frac{2}{3}\sin\alpha$$

$$Alan(ABC) = A(GBD)\cdot 6 = 6\cdot\frac{2}{3}\sin\alpha$$

$$Alan(ABC) = 4\cdot\sin\alpha$$

$$\max(Alan(ABC)) = 4\cdot\sin 90 = \underline{\underline{4}}$$

Cevap: D

2.

2) Sayımız A olsun.

$x\in\mathbb{Z}^+$ ye $A = 90\cdot x = 2^1\cdot 3^2\cdot 5^1\cdot x = 2^a\cdot 3^b\cdot 5^c\ldots \Rightarrow a\geq 1,\ b\geq 2,\ c\geq 1 \Rightarrow$

$20 = (a+1)\cdot(b+1)\cdot(c+1) \geq 2\cdot 3\cdot 2 = 12$ olduğundan x çarpanı 2,3 ve 5'ten farklı olamaz. $3\nmid 20$ olduğundan $x=9$ olmak zorunda. Dolayısıyla

$A = 810 = 2^1\cdot 3^4\cdot 5^1 \longrightarrow p.b.s = 2.5.2 = 20$. Yani tek çözüm var.

Cevap: D

3.

Çözüm:

$$\sqrt[3]{abc}+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \overset{(AGO)}{\geq} \sqrt[3]{abc}+3\sqrt[3]{\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{b}\cdot\frac{1}{c}} \overset{(AGO)}{\geq} 2\sqrt{\sqrt[3]{abc}\cdot\frac{3}{\sqrt[3]{abc}}} \geq 2\sqrt{3}$$

Eşitlik durumu:

$a=b=c$ ve $a=\frac{3}{a}$ (Yani $a=b=c=\sqrt{3}$) sağlanır. Cevap: C

4.

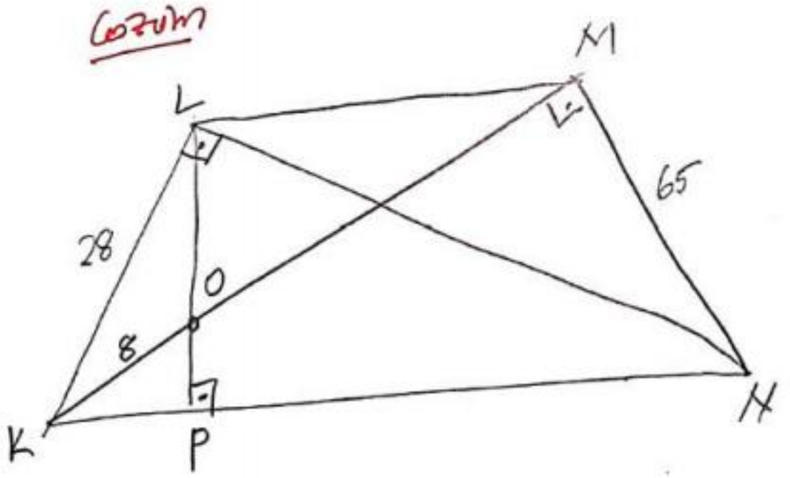
Çözüm:

$A=\{n \mid n\equiv 1 \pmod 3\}$, $B=\{n \mid n\equiv 2 \pmod 3\}$ ve $C=\{n \mid n\equiv 0 \pmod 3\}$ olsun. A, B, C kümeleri verilen kümenin alt kümeleri olmak şartıyla C'den sadece 1 eleman alınabilir. A ve B den aynı zamanda eleman alınamaz. $s(A)=s(B)$ olduğundan A ya da B'nin hangisinden eleman aldığımızın önemi yok. $s(A)=2004:3=668$

En fazla $s(A\cup\{3\})=669$ eleman alınabilir. Cevap: B

5.

Çözüm



Öklit gereği

$|KL|^2=|KP|.|KN|$

$28^2=|KP|.|KN|$ bulunur.

$\overset{\Delta}{KPO} \sim \overset{\Delta}{KMN}$ olduğundan

$\dfrac{|KP|}{|KM|}=\dfrac{8}{|KN|} \Rightarrow |KM|=\dfrac{28^2}{8}=98$

$|MO|=|KM|-|KO|=98-8$
$=90$ bulunur.

Cevap: A

6.

$A=2m.(2m+2).(2m+4).(2m+6).(2m+8)=2^5.m.(m+1)(m+2).(m+3)(m+4)$

$A=32.B$ öyle ki $3|B$, $5|B$ ve $8|B$ dir.

Dolayısıyla $32.3.5.8\,|A \Rightarrow 3840|A$ olur. $m=1 \Rightarrow A=3840$

Cevap: E

7.

Çözüm:

$2n < a_n < 2n+1$ olduğundan $[\![a_n]\!] = 2n$ dir.

$m=4 \Rightarrow \sqrt{4n^2+n} - 2n \overset{?}{<} \frac{1}{4} \Rightarrow 4n^2+n \overset{?}{<} 4n^2+n+\frac{1}{16} \Rightarrow$ eşitsizlik sağlanır.

$m=5 \Rightarrow \sqrt{4n^2+n} - 2n \overset{?}{<} \frac{1}{5} \Rightarrow 4n^2+n \overset{?}{<} 4n^2+\frac{4n}{5}+\frac{1}{25} \Rightarrow n<\frac{1}{5}$

olduğundan eşitsizlik sağlanmaz. Cevap: C

8.

Çözüm:

$40 = 1+2+3+4+5+6+7+8+1+3$ olduğundan 8 farklı yaş grubu $a_1<a_2<a_3<\dots<a_9$ olacak şekilde bulduk. Diğer taraftan $a_1<a_2<a_3<\dots<a_9$ olsaydı $a_i \geq i$ olduğundan

$40 = a_1+a_2+a_3+\dots+a_9+a_{10}$

$40 \geq 1+2+3+4+5+6+7+8+9+a_{10} = 45+a_{10} > 40$ olacaktır.

Demek ki 8'den fazla farklı yaş grubu olamaz.

Cevap: C

9.

Çevrel çemberinin yarıçapı $4\sqrt{3}$ olan eşkenar üçgenin kenarlarını çap olarak alıp 3 daire çizersek, büyük daireyi kaplar. Bu durumda $r=\frac{4\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}{2}=6$ bulunur. Küçük dairelerden en az biri $\geq 120^\circ$'lik yayı kapatmak zorunda olduğundan $r \geq 6$ bulunur. Cevap: E

10.

Çözüm:

$m^3 + m^2n^2 + mn + n^3 = m^3 + 3m^2n + 3mn^2 + n^3 \Rightarrow$

$mn(mn+1) = 3mn(m+n) \Rightarrow mn+1 = 3m+3n \Rightarrow$

$mn - 3m = 3n - 1 \Rightarrow m = \frac{3n-1}{n-3} = 3 + \frac{8}{n-3} \rightarrow \mp 1, \mp 2, \mp 4, \mp 8$

olduğundan 8 farklı (m,n) ikilisi vardır.

Cevap: E

11.

$x^2 \leq y^2 \Rightarrow 1-z^2 \leq 1-y^2 \Rightarrow y^2 \leq z^2 \Rightarrow 1-u^2 \leq 1-z^2 \Rightarrow z^2 \leq u^2 \Rightarrow$

$1-x^2 \leq 1-u^2 \Rightarrow u^2 \leq x^2$ elde edilir. Buradan $x^2 = y^2 = z^2 = u^2$

olduğu ortaya çıkar. $x^2(1-x^2) = \frac{1}{5} \Rightarrow x^4 - x^2 + \frac{1}{5} = 0$ ve $\Delta > 0$

olduğundan kökler toplamı ve kökler çarpımı incelendiğinde

x^2 nin birbirinden farklı iki pozitif reel çözümü vardır.

$x^2 = a$ olsun. $x = \mp\sqrt{a}$ olur. x, y, z ve u için $2^4 = 16$ durum

$x^2 = b$ olsun. $x = \mp\sqrt{b}$ olur. x, y, z ve u için $2^4 = 16$ durum

olduğundan denklem sisteminin 32 farklı çözümü vardır.

Cevap: D

12.

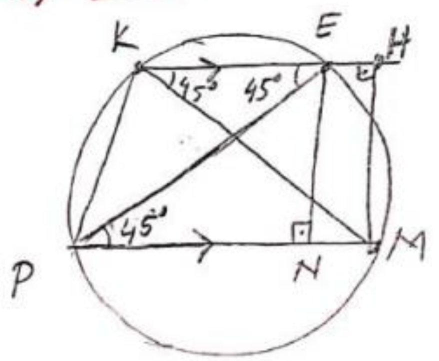
Çözüm:

Tek numaralı satır ve sütunlardaki siyah kareler, çift numaradakilerle aynı satır ve sütunda bulunmadığı için $4! \cdot 4! = 576$ farklı yolla 8 dama taşı yerleştirilebilir.

Cevap: B

13.

13) Çözüm:



$|PE|=14 \Rightarrow |EN|=7\sqrt{2}$ bulunur.

$|EN|=|HM|$ olduğundan $KH \perp HM$ dir.

Aynı yayı gören çevre açılar eşit olduğundan $m(H\hat{K}M)=45°$ bulunur.

$|HM|=|KH|=7\sqrt{2}$ dir. Cevap C

14.

Çözüm:

$(x-y)^2 \geq 0 \Rightarrow x^2-2xy+y^2 \geq 0 \Rightarrow x^2+y^2 \geq 2xy \Rightarrow z(x^2+y^2) \geq 2xyz \Rightarrow$

$2xy \geq 2xyz \Rightarrow z \leq 1 \xRightarrow{z \in \mathbb{Z}^+} z=1 \xRightarrow{\text{Eşitlik durumu}} x=y$ bulunur.

Bu durumda $(x,y,z)=(n,n,1)$ ve $n=1,2,3,\ldots,9$ olduğunda

9 farklı (x,y,z) pozitif tam sayı üçlüsü vardır. Cevap: E

16.

16) $a_1<a_2<\cdots<a_{20}$ olsun. $x<y<z$ olmak üzere alınmış (x,y,z) iyi üçlüsünde $x=a_1$ ise $y=a_2,a_3,\ldots,a_{19}$ olabilir. z'de $x+y$ olacak. $x=a_2$ ise $y=a_3,a_4,\ldots,a_{18}$ olabilir. Benzer şekilde devam edildiğinde $18+16+\cdots+2=90$ farklı iyi üçlü olabileceği anlaşılır.

Örnek durum için $A=\{1,2,3,4,\ldots,19,20\}$ kümesi alınırsa

$\ddot{u}_1 \Rightarrow \{1,2,3\},\{1,3,4\},\ldots,\{1,19,20\} \rightarrow 18$ tane

$\ddot{u}_2 \Rightarrow \{2,3,5\},\{2,4,6\},\ldots,\{2,18,20\} \rightarrow 16$ tane

$\vdots$

$\ddot{u}_9 \Rightarrow \{9,10,19\},\{9,11,20\} \longrightarrow 2$ tane

$+$

90 bulunur.

15.

Çözüm

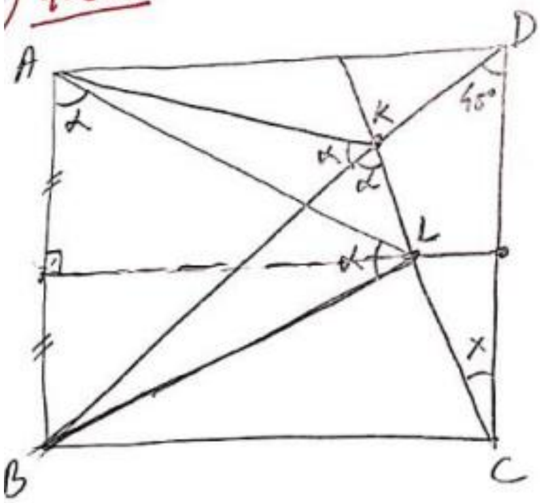
$\frac{1}{x^n+1}+\frac{1}{x^{-n}+1}=1$ olduğunu biliyoruz. Ayrıca $\frac{1}{2004^0+1}=\frac{1}{2}$ dir.

Toplamda 10 tane eşleme yapabileceğimizden sonuç 10,5 bulunur.

Cevap: A

17.

Çözüm:



Karede köşegen simetri ekseni olduğundan ABCK deltoid olur. Dolayısıyla $m(A\hat{K}B)=m(B\hat{K}C)=\alpha$ dır. $m(A\hat{K}B)=m(A\hat{L}B)=\alpha$ olduğundan ABLK kirişler dörtgenidir. Dolayısıyla $m(B\hat{A}L)=m(B\hat{K}L)=\alpha$ dır. Aynı zamanda L noktası [AB]'nin orta dikmesi üzerinde olduğundan ABL eşkenar üçgen olur. $\alpha=60°$ dir.

$x+45=60 \Rightarrow x=15°$ bulunur.

Cevap: A

18.

$(n+1)^k=n!+1 \Rightarrow n+1$ sayısının bir p asal böleni için sol taraf p'ye bölünür. $p\le n$ ise sağ taraf p'ye bölünmez. Dolayısıyla $p=n+1$ dir. $p=2,3$ ve 5 için $(1,1),(2,1)$ ve $(4,2)$ çözümleri elde edilir. $n+1\geq 7 \Rightarrow n^2|n! \Rightarrow n^2|(n+1)^k-1$ dir.

$(n+1)^k-1=n^k+k.n^{k-1}+\dots+\frac{k(k-1)}{2}.n^2+n.k$ toplamının son terimi hariç tüm terimleri n^2 ile bölünür. O zaman $n^2|nk \Rightarrow n|k$ elde edilir. $n!=(n+1)^k-1>n^k\geq n^n>n!$ olduğundan çelişki elde edilir. Demek ki başka çözüm yoktur. Cevap: C

19.

Çözüm:

$$\frac{1}{x_{n+1}} = \frac{1}{x_n^2+x_n} = \frac{1}{x_n} - \frac{1}{x_n+1} \Rightarrow \frac{1}{x_n+1} = \frac{1}{x_n} - \frac{1}{x_{n+1}} \Rightarrow$$

$$S = \frac{1}{x_1+1} + \frac{1}{x_2+1} + \dots + \frac{1}{x_{2004}+1} = \frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_{2004}} = 3 - \frac{1}{x_{2004}}$$ bulunur.

$x_2 = \frac{4}{9}$, $x_3 = \frac{52}{81}$, $x_4 = \frac{6916}{6561} > 1$ olduğundan $x_4 < x_5 < \dots$ dır.

Dolayısıyla $0 < \frac{1}{x_{2004}} < 1 \Rightarrow 2 < S < 3$ bulunur. Cevap: B

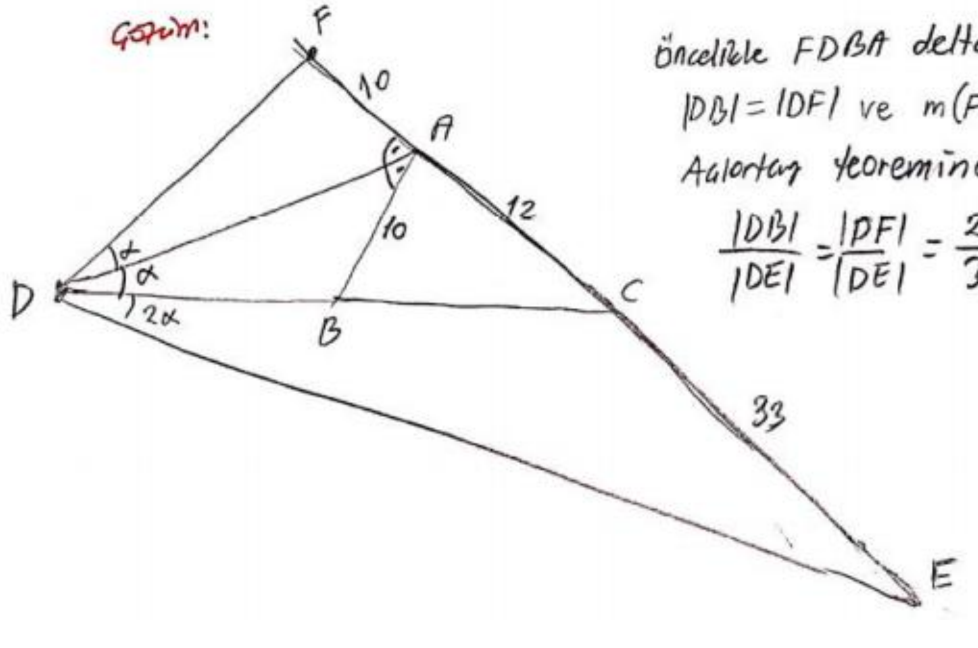
20.

Çözüm:

$a+b+c \equiv c+5b+3c-5a+2b-3a \equiv 2a+3b+b+3c+4c+2a \pmod 3$ olduğunu görüyoruz. $1+2+4 \equiv 1 \pmod 3$ iken seçenekler $(n, n+1, n+2)$ tipindedir ve $n+n+1+n+2 \equiv 0 \pmod 3$ 'tür. Dolayısıyla hiçbir seçeneğe ulaşmak mümkün değildir. Cevap: E

21.

Çözüm:



Öncelikle FDBA deltoidini çizelim. $|DB| = |DF|$ ve $m(\widehat{FDC}) = m(\widehat{CDE})$ olur. Açıortay teoreminden;

$$\frac{|DB|}{|DE|} = \frac{|DF|}{|DE|} = \frac{22}{33} = \frac{2}{3}$$ bulunur.

Cevap: A

22.

) Çözüm: $(abcba) = 10001a + 1010b + 100c = 101(99a + 10b + c) + 2a - c$

$2a - c = 0 \Rightarrow 2a = c \Rightarrow a \leq 4 \Rightarrow a = 4,\ c = 8,\ b = 9 \Rightarrow 49894$

Cevap: A

$\Rightarrow 4 + 9 + 8 + 9 + 4 = 34$

23.

24)

$$\frac{2a}{3b} + \frac{b}{3c} = \frac{1}{3}\left(\frac{a}{b} + \frac{a}{b} + \frac{b}{c}\right) \overset{(AGO)}{\geq} \sqrt[3]{\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{c}} = \sqrt[3]{\frac{a^2}{bc}} \overset{}{=} \sqrt[3]{\frac{a^3}{abc}} = a$$

Benzer şekilde $\frac{2b}{3c} + \frac{c}{3a} \geq b$ ve $\frac{2c}{3a} + \frac{a}{3b} \geq c$ olur.

Taraf tarafa toplama yaparsak $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq a + b + c$ elde edilir.

Eşitlik durumu $a = b = c = 1$ ile mümkündür. Cevap: A

24.

23) Çözüm:
$A = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$, $x_1 < x_2 < x_3 < x_4 < x_5$ olsun. $s(B) \leq \binom{5}{2} = 10$

$x_1 + x_2 < x_1 + x_3 < x_1 + x_4 < x_1 + x_5 < x_2 + x_5 < x_3 + x_5 < x_4 + x_5 \Rightarrow s(B) \geq 7$

olduğundan $s(B) \in \{7, 8, 9, 10\}$

örnek durum için $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ alınırsa $B = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\} \Rightarrow s(B) = 7$

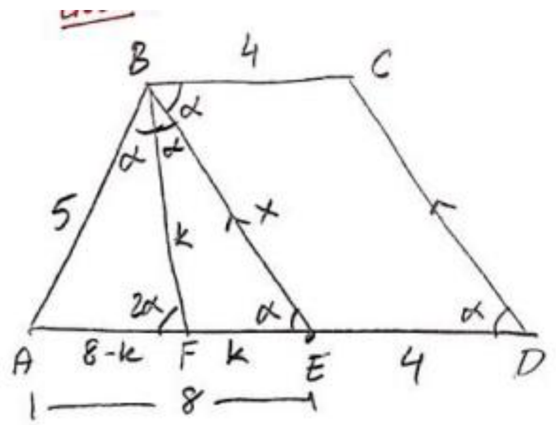
$A = \{1, 2, 3, 4, 6\}$ alınırsa $B = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\} \Rightarrow s(B) = 8$

$A = \{1, 2, 4, 7, 10\}$ alınırsa $B = \{3, 5, 6, 8, 9, 11, 12, 14, 17\} \Rightarrow s(B) = 9$

$A = \{1, 2, 4, 6, 10\}$ alınırsa $B = \{3, 5, 6, 7, 8, 10, 11, 12, 14, 16\} \Rightarrow s(B) = 10$

biçiminde gösterilebilir. Cevap: B

25.



$\overset{\triangle}{ABF} \sim \overset{\triangle}{AEB}$

$\frac{8-k}{5} = \frac{5}{8} = \frac{k}{x} \Rightarrow k = \frac{39}{8}$, $x = \frac{39}{5} = 7{,}8$

bulunur.

Cevap: E

26.

$5^p + 4p^4 = m^2 \Rightarrow (m-2p^2)(m+2p^2) = 5^p$ elde edilir.

$m - 2p^2 = 5^a$ ve $m + 2p^2 = 5^b \Rightarrow a < b \Rightarrow 2m = 5^a(5^{b-a}+1)$ dir

1) $a > 0$ ise $5 | m \Rightarrow 5 | p$ dir. O zaman $p = 5$ bulunur.

O zaman $5^5 + 4.5^4 = 9.5^4 = (3.25)^2 = 75^2 \Rightarrow m = 75$ bulunur.

2) $a = 0$ ise $m = 2p^2 + 1 \Rightarrow 5^p + 4p^4 = 4p^4 + 4p^2 + 1 \Rightarrow 5^p = 4p^2 + 1$ dir.

$p \geqslant 3$ için $5^{p-1} > p^2 + 1 \Rightarrow 5^p > 5p^2 + 5 > 4p^2 + 1$. Çelişki.

Cevap: B

27.

$[\![n]\!] = m$ ise, $m \le \sqrt{n} < m+1 \Rightarrow m^2 \le n < m^2 + 2m + 1$

$m | n \Rightarrow n \in \{m^2, m^2+m, m^2+2m\}$ olur. Buradan 2004'e

en yakın tam kareler $44^2 = 1936$ ve $45^2 = 2025$ tir.

$44^2 + 44 = 1980$, $44^2 + 2.44 = 2024 < 2025$ olduğundan

$2024 \Rightarrow 2+0+2+4 = 8$

Cevap: A

28.

A) $n=60$ ise Betül sayıyı 6'şar basamaklı 10 sayıya bölüp bunların abcabc şeklinde olmasını sağlıyor. Böylece $13|1001|abcabc$ olduğundan Betül son hamlesinde bu durumu bozar ve kazanır.

B) $n=61$ ise Betül birler basamağına 0 yazıyor, sonra A'daki taktiği uygulayıp kazanır.

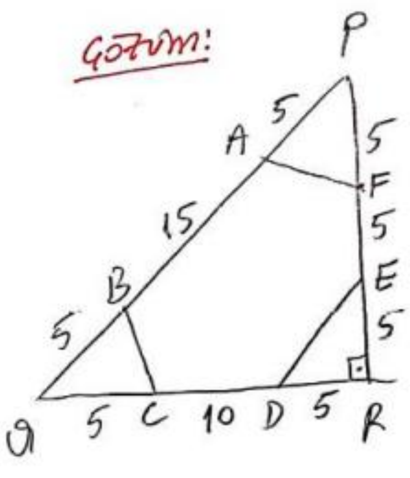
C) $n=30$ ise Betül A'daki taktiği uygular ve kazanır.

D) $n=31$ ise Ayşe birler basamağına 0 yazıyor, sonra Betül'ün A'daki taktiğini uygulayıp kazanır.

Cevap: A

29.

Çözüm:



$A(PQR)=\frac{15.20}{2}=150$ ve $A(DRE)=\frac{5.5}{2}=12,5$

$\frac{A(QBC)}{A(PQR)}=\frac{5.5}{20.25}=\frac{1}{20} \Rightarrow A(QBC)=7,5$

$\frac{A(PAF)}{A(PQR)}=\frac{5.5}{15.25}=\frac{1}{15} \Rightarrow A(PAF)=10$

$A(ABCDEF)=150-(12,5+7,5+10)=120$

Cevap: D

30.

n sağlar $\Leftrightarrow$ $n+6$ sağlar. Buna göre 6 durumda inceleyelim

1) $n=0$ sağlar. 2) $n=1 \Rightarrow 1=0$ sağlamaz

3) $n=2 \Rightarrow 2+0=1+1$ sağlar 4) $n=3 \Rightarrow 3+0=1+2$ sağlar

5) $n=4 \Rightarrow 4+0=2+2$ sağlar 6) $n=5 \Rightarrow 5+0=2+3$ sağlar

Cevap: C

31.

Çözüm:

$f(x)-3.f(\frac{1}{x})=3^x$ denkleminde x yerine $\frac{1}{x}$ yazalım.

$f(\frac{1}{x})-3f(x)=3^{\frac{1}{x}}$ denklemi elde edilir. Bu iki denklemden

$f(x)=\dfrac{3^x+3.3^{\frac{1}{x}}}{-8}$ elde edilir. $f(2)=\dfrac{9+3\sqrt{3}}{-8}$ dır.

Cevap: E

32.

Çözüm:

Toplam $\frac{8.7}{2}=28$ maç yapılmış ve dolayısıyla 28 puan var.

Şampiyonun puanı p ise, 2. sıradakinin puanı en fazla $p-\frac{1}{2}$

3. sıradakinin puanı en fazla $p-1$, ..., 8. sıradakinin puanı

en fazla $p-\frac{7}{2}$ dır. Buna göre $8p-\frac{7.8}{2.2}\geqslant 28 \Rightarrow 8p\geqslant 42$ dır

buradan $p>5 \Rightarrow p\geqslant 5,5$ olur.

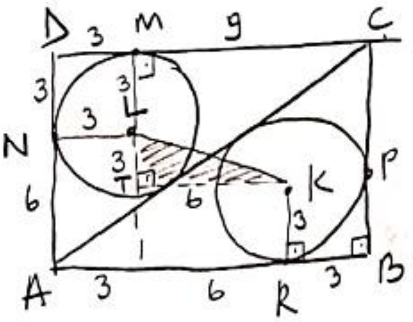
Örnek durum için bir tablo:

	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	
1.		1/2	1/2	1/2	1	1	1	1	→ 5,5 puan
2.	1/2		1/2	1/2	1/2	1	1	1	→ 5 "
3.	1/2	1/2		1/2	1/2	1/2	1	1	→ 4,5 "
4.	1/2	1/2	1/2		1/2	1/2	1/2	1	→ 4 "
5.	0	1/2	1/2	1/2		1/2	1/2	1	→ 3,5 "
6.	0	0	1/2	1/2	1/2		1/2	1	→ 3 "
7.	0	0	0	1/2	1/2	1/2		1	→ 2,5 "
8.	0	0	0	0	0	0	0		→ 0 "

+ 28 puan

TUĞBA DENEME ÇÖZÜMLER

1.



$|AC| = 15$ (pisagor teoremi)

$|BP| = |BR| = u - |AC| = \dfrac{9+12+15}{2} - 15 = 3$ olur.

$\widehat{ADC} = \widehat{CBA}$ olduğundan $|DM| = |DN| = 3$'dür.

$ML \cap KP = T$ olsun.

$\widehat{LTK}$ ninde pisagor teoreminden

$|LK|^2 = 3^2 + 6^2$, $|LK| = 3\sqrt{5}$ bulunur.

2.

Çözüm

Bize verilen tamsayıya n dersek, $100 \leq 7n < 1000$ aralığında olmalıdır. $7n$ en az 105 ve en fazla 693 olabilir. $735 \leq 7^2 \cdot n < 1000$ olduğundan $15 \leq n \leq 20$ bulunur. $n = 15, 16, 17, 18, 19, 20$ olmak üzere 6 tamsayı değeri alır.

3.

$$6 = \frac{a+b}{a-b} + \frac{a-b}{a+b} = \frac{2a^2+2b^2}{a^2-b^2}, \text{ yani}$$

$$\Rightarrow \frac{2a^2+2b^2}{a^2-b^2} = 6 \text{ ise } 6a^2 - 6b^2 = 2a^2 + 2b^2 \Rightarrow 4a^2 = 8b^2 \text{ eder.}$$

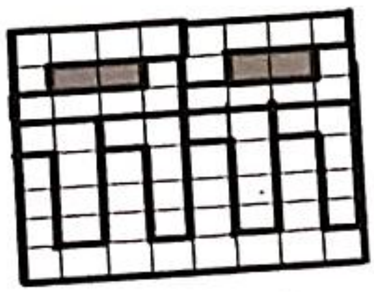
Buradan $a = \mp b\sqrt{2}$ buluruz. Değerlerimizi yerine yazarsak;

$$\frac{a^3+b^3}{a^3-b^3} + \frac{a^3-b^3}{a^3+b^3} = \frac{2a^6-2b^6}{a^6+b^6} = \frac{(2\cdot 2^3+2)b^6}{(2^3-1)b^6} = \frac{18}{7}$$

4.

Çözüm:

$\left[\!\left[\dfrac{64}{5}\right]\!\right] = 12$, dolayısıyla 12'den fazla bulunmaz. Şekilde de gördüğümüz gibi 12 tane bulunabilir.



5.

ÇÖZÜM:

$|AD| = |BD| = |CD|$ olduğundan D merkezli ve A, B, C noktalarından geçen çember çizilebilir.

$m(A\hat{D}B) = \alpha$ alınırsa, $m(A\hat{C}B) = \frac{\alpha}{2}$ (çevre açı), $|DC| = |BD|$ olduğundan $m(C\hat{A}B) = m(D\hat{B}C) = \frac{3\alpha}{2}$ olur.

$|AD| = |BD|$ olduğundan $m(D\hat{A}B) = m(D\hat{B}A) = \frac{5\alpha}{2}$ ve $\overset{\triangle}{ADB}$'nin iç açıları toplamından $\alpha = 30°$ olur. $m(D\hat{A}B) = \frac{5\alpha}{2} = \frac{5 \cdot 30}{2} = 75°$ dir.

6.

Verilen üç sayı toplanarak düzenlenirse;

$3n^2-31n+100 = 2n^2-30n+n^2-n+100 = 2n^2-30+n\cdot(n+1)+100$

bu toplamın çift olduğu görülür. Bu da bize bu üç sayıdan birinin 2 olduğunu gösterir.

$n^2-10n+23=2$, $n^2-9n+31=2$, $n^2-12n+46=2$ denklemleri çözülürse ilk denklemden $n=3$ ve $n=7$ bulunur. Bu n değerleri verilen diğer ifadeleri de asal yaptığından çözümdür.

7.

Verilenlere göre; $2a^2-3abt+b^2=0$ iken $t = \frac{2a^2+b^2}{3ab}$ eder. $2a^2+abt-b^2=0$ iken $t = \frac{b^2-2a^2}{ab}$ eder. Bu nedenle, $\frac{2a^2+b^2}{3ab} = \frac{b^2-2a^2}{ab} \Rightarrow 2a^2+b^2 = 3b^2-6a^2 \Rightarrow 8a^2 = 2b^2$, veya $4a^2 = b^2$, a ve b pozitif olduğundan, $b = 2a$ olarak buluruz.

bulunur.

$$t = \frac{2a^2+4a^2}{6a^2} = 1$$

8.

Başlangıç olarak ilk sıraya oturacak olan 2 kişiyi;

$$\frac{2n(2n-1)}{2}$$

farklı yolla seçeriz. İkinci sıraya oturacak olan iki kişiyi;

$$\frac{(2n-2)(2n-3)}{2}$$

farklı yolla seçeriz. Diğer seçimleride aynı şekilde yaparsak;

$\frac{2n(2n-1)}{2} \cdot \frac{(2n-2)(2n-3)}{2} \cdot \ldots \cdot \frac{(2.1)}{2} = \frac{(2n)!}{2^n}$ sonucuna ulaşırız.

9.

ozum:

DF // BC olduğu (Thales teoremi) görülür. $A(\overset{\triangle}{DEF}) = A(\overset{\triangle}{DFC})$ ve $A(\overset{\triangle}{DFC}) = 3 \cdot A(\overset{\triangle}{DAF})$ olduğundan $A(\overset{\triangle}{DEF}) = 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 6 \cdot \sin 120°$

$A(\overset{\triangle}{DEF}) = 18\sqrt{3}$ olur. Bir noktanın üçgenin köselerine göre yansıma tai-rını köşe kabul eden üçgenin alanı (nokta herhangi bir yerde olabilir) ilk üçgenin alanının 4 katıdır. Buradan istenen üçgenin alanı $18\sqrt{3} \cdot 4 = 72\sqrt{3}$ bulunur.

10.

$ab/2c$ ve $ca/5b$ ise $ab \cdot ca$ sayısı da $2c \cdot 5b$ sayısıyla tam bölünür.Bundan dolayı, a^2 'de $2 \cdot 5$ sayısıyla tam bölünür. a^2 sayısı 2 ve 5 ile bölündüğünden, a sayısı da 2 ve 5 ile bölünür. Aynı şekilde b sayısı 2 ve 3, c sayısı 3 ve 5 ile bölünür. Sonuç olarak abc sayısı $2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 = 900$ ile bölünür. (Diğer bir şekilde, $a = 10, b = 6, c = 15 \Rightarrow abc = 10 \cdot 6 \cdot 15 = 900$ eder.)

11.

Çözüm: A) 4042 B) 4021 c) 4013 d) 2021 e) 2010

Eşitliğin sol tarafı düzenlenirse

Çözüm için geometrik dizi formülünü kullanırız. ~~Verilenlere göre~~;

$$-\left((-2)^0+(-2)^1+(-2)^2+\cdots+(-2)^n\right)=\frac{-1((-2)^{n+1}-1)}{-2-1}=\frac{1\cdot(4^{2011}-1)}{4-1}$$

veya $(-2)^{n+1}=4^{2011}$ olarak bulunur. Yani bunların sonucunda, n tek sayı olmalıdır. $n=2m+1 \Rightarrow (-2)^{2m+2}=4^{2011} \Rightarrow 4^{m+1}=4^{2011}$ ifadesinden $m=2010$ ve $n=4021$ olarak bulunur.

12.

$6^2=36$ tane farklı kombinasyonumuz vardır. Koşulumuzu sağlayan durumları inceleyelim. Güvenin atacağı zarın üzerindeki sayı Tuğba'nınkinden büyük olacağından, Güven'in attığı zarın üzerindeki sayı 1 olamaz . O nedenle zarın üzerinde ki sayı en az 2 olur.

Güven'in attığı zarın üzerindeki sayı 2 ise, Tuğba ki 1.

Güven'in attığı zarın üzerindeki sayı 3 ise, Tuğba ki 1 ve 2.

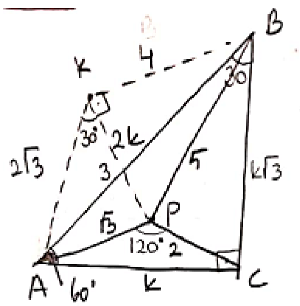
Güven'in attığı zarın üzerindeki sayı 4 ise, Tuğba ki 1, 2 ve 3.

Güven'in attığı zarın üzerindeki sayı 5 ise, Tuğba ki 1, 2, 3 ve 4.

Güven'in attığı zarın üzerindeki sayı 6 ise, Tuğba ki 1, 2, 3, 4 ve 5.

Burdan istenilen durumumuz 15 olur. $\Rightarrow \frac{15}{36}=\frac{5}{12}$

13.



$|AC|=k$ ve $|AB|=2k$ olsun.

$\frac{|AC|}{|AB|}=\frac{1}{2}$ ve $m(B\hat{A}C)=60°$ olduğundan $\overset{\triangle}{ABC}$'ni dik üçgendir ve $|BC|=k\sqrt{3}$ olur.

ABC üçgeninin dışında alınan bir K noktası yardımıyla $\overset{\triangle}{APC} \sim \overset{\triangle}{AKB}$ üçgeni çizelim. (Benzerlik oranı $\frac{1}{2}$ olsun)

$m(P\hat{A}C)=m(K\hat{A}B)$ olduğundan $m(K\hat{A}P)=60°$ ve $|KP|=3$ olur. $\overset{\triangle}{PKB}$'ni dik üçgendir.

$m(A\hat{P}C)=m(A\hat{K}B)=30+90°=120°$'dir.

$\overset{\triangle}{APC}$'ninde kosinüs teoremi uygulanırsa

$$k^2=\sqrt{3}^2+2^2-2.2.\sqrt{3}.\cos 120$$

$$k^2=7+2\sqrt{3}$$

$A(ABC)=\frac{k.k\sqrt{3}}{2}=\frac{7\sqrt{3}+6}{2}$ bulunur.

14.

$n = 0$ ve $n = 1$ için soruda verilen koşulun sağlandığı zaten açık şekilde görülüyor.

$9n + 16 = x^2$ ve $16n + 9 = y^2$ olsun,

$16x^2 - 9y^2 = 16^2 - 9^2 \Rightarrow (4x - 3y)(4x + 3y) = 7.5^2$.

$x, y > 0$ için, $4x - 3y > 0$ olmalı ve aşağıdaki durumları inceleriz.

$\Rightarrow 4x - 3y = 1$
$4x + 3y = 175,$

$\Rightarrow 4x - 3y = 5$
$4x + 3y = 35,$

$\Rightarrow 4x - 3y = 7$
$4x + 3y = 25,$

Sırasıyla $x = 22, 5, \cancel{8}\ 4$ olarak buluruz. $n = 52$, $n = 1$ ve $n = 0$ olduğunda verilen ifadeler tamkare olur.

$52 + 1 + 0 = 53 \Rightarrow 168$'in 53 ile bölümünden kalan 4 olur.

15.

$n = 0$ ve $n = 1$ için soruda verilen koşulun sağlandığı zaten açık şekilde görülüyor.

$9n + 16 = x^2$ ve $16n + 9 = y^2$ olsun,

$16x^2 - 9y^2 = 16^2 - 9^2 \Rightarrow (4x - 3y)(4x + 3y) = 7.5^2$.

$x, y > 0$ için, $4x - 3y > 0$ olmalı ve aşağıdaki durumları inceleriz.

$\Rightarrow 4x - 3y = 1$
$4x + 3y = 175,$

$\Rightarrow 4x - 3y = 5$
$4x + 3y = 35,$

$\Rightarrow 4x - 3y = 7$
$4x + 3y = 25,$

Sırasıyla $x = 22, 5, \cancel{8}\ 4$ olarak buluruz. $n = 52$, $n = 1$ ve $n = 0$ olduğunda verilen ifadeler tamkare olur.

$52 + 1 + 0 = 53 \Rightarrow 168$'in 53 ile bölümünden kalan 4 olur.

16.

M'nin elemanlarına a, b, c, d diyelim ve $a < b < c < d$ olsun.

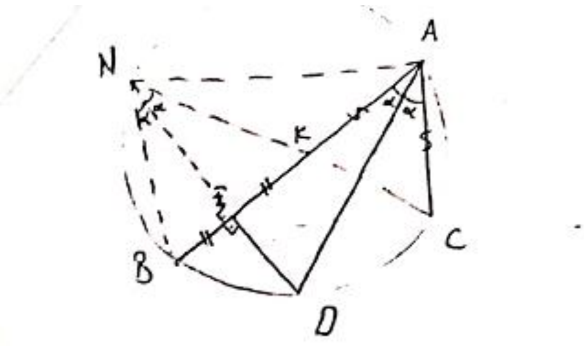
$a - 1 \notin M \Rightarrow a + 1 \in M \Rightarrow b = a + 1.$

$d + 1 \notin M \Rightarrow d - 1 \in M \Rightarrow c = d - 1.$

$\Rightarrow M = \{a, a+1, d-1, d\}$

$\Rightarrow \{1, 2, \ldots, 7\}$ kümesinin 10 tane "iyi" altkümesi vardır.

17.



[ED]'yi uzatalım, çemberle kesiştiği noktaya N diyelim.

[NA], [NB] ve [NC]'yi çizelim.

$m(B\hat{N}E) = m(E\hat{N}C) = m(B\hat{A}D) = \alpha$ olur.

[NE] açıortay ve yükseklik $\Rightarrow$ BNK üçgeni ikizkenardır.

Benzer şekilde AKC üçgeni de ikizkenardır.

$\Rightarrow |AE| = |AK| + |KE| = 3 + \frac{4}{2} = 5.$

18.

$a = a_1a_2 \dots a_n \Rightarrow b = a_1a_2 \dots a_n a_1 a_2 \dots a_n$

$b \mid a(10^n+1) \Rightarrow \frac{b}{a^2} = \frac{10^n+1}{a} = c$ diyelim.

$10^{n-1} \leq a < 10^n \Rightarrow c < 10, \quad c \mid 10^n+1$

$2 \nmid 10^n+1, \ 3 \nmid 10^n+1, \ 5 \nmid 10^n+1 \Rightarrow c = 7$'dir.

$a = 143$ sayılar.

19.

Çözüm:

$M(a,b) = \max\{3a^2 + 2b, 3b^2 + 2a\}$ olarak alalım. Burdan $M(a,b) \geq 3a^2 + 2b$ ve $M(a,b) \geq 3b^2 + 2a$ eder. Bu iki eşitsizlikten; $2M(a,b) \geq 3a^2 + 2b + 3b^2 + 2a$ buluruz.

$$\frac{2}{3} \cdot M(a,b) + \frac{2}{9} \geq (a + \frac{1}{3})^2 + (b + \frac{1}{3})^2 \geq 0$$

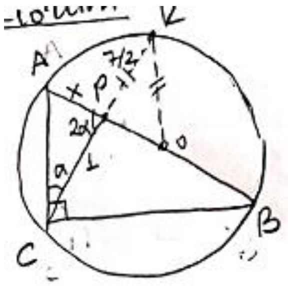
veya $M(a,b) \geq -\frac{1}{3}$ ve $M(a,b) = -\frac{1}{3}$ olur. O halde,

$a = b = -M(a,b) \geq -\frac{1}{3}$ eder. $a + b = -M(a,b) \geq -\frac{2}{3}$ eder.

20.

İlk seçilen sayılar 1 ve $\frac{1}{2}$ olsun. Bunların yerine yazılan sayı $1+\frac{1}{2}+1\cdot\frac{1}{2}=2$ olur. Şimdi 2 ile $\frac{1}{3}$ sayısını seçelim $2+\frac{1}{3}+2\cdot\frac{1}{3}=3$ olur. k ve $\frac{1}{k+1}$ den oluşan her ikili için $k+\frac{1}{k+1}+k\cdot\frac{1}{k+1}=k+1$ bulunur. İşlem bu şekilde devam ettirilirse sonuç 2010 bulunur.

21.



$\overset{\Delta}{ACB}$'nin çevrel çemberini çizelim. CP'nin çemberi ikinci kez kestiği nokta K ve çevrel çemberin merkezi O olsun. $O \in [AB]$ dir.

$m(\widehat{AOK}) = 2m(\widehat{ACK}) = m(\widehat{APC})$ olduğundan $|PK| = |KO| = \frac{7}{2}$ olur.

$|AP| = x$ ye P noktasına göre kuvvet alınırsa

$1\cdot\frac{7}{2} = x\cdot(7-x)$, $2x^2 - 14x + 7 = 0$ $x = \frac{7-\sqrt{35}}{2} = |AP|$ olur.

$|BP| = \frac{7+\sqrt{35}}{2}$ ve istenen oran $6-\sqrt{35}$ dur.

22.

44 ile tam bölünebilen bir n sayısı alalım; $(1000a + 100b + 10c + d)$. Bu sayı aynı zamanda 11 ile de tam bölünür. Şimdi 11 ile tam bölünebilen bir m sayısı alalım, $m = 1001a + 99b + 11c$. 11 ile bölünebilme kuralından ; $m - n = a - b + c - d$ 11'in katıdır. $m - n$ sayısı en fazla $13 - 6 = 6$ ve en az $6 - 13 = -6$ değerini alır. -6 ile 6 arasında 11'e bölünen tek sayı 0 'dır. O nedenle $a - b + c - d = 0$ olmalı. Bu durumda $a + c = b + d$ olmalı ve bunun olabilmesi için de $a + c = b + d = 10$ olmalı.

İlk olarak $d = 4$ olarak kabul edersek $b = 6$ olmalı. Bu durumda n sayılarımız için iki olasılık var;

3674 ve 7634 fakat bu sayılar 4 ile bölünemez. 44 ile bölünmesi için 4'e de bölünmesi gerektiğinden bu sayılarımız olmaz. şimdi $d = 6$ ve $b = 4$ olarak kabul edelim , bu durumda sayılarımız 3476 ve 7436 olur ve iki sayıda 44 ile tam bölünür. (n'in 4 ile bölünebilmesi için d çift sayı olmak zoundadır.) Sonuç olarak, n değerini sağlayan 2 tane sayımız vardır .

23.

$A = a + b + c$ olsun.

$$M = \frac{a+b-c}{(a-c)(b-c)} + \frac{(b+c-a)^2}{(b-a)(c-a)} + \frac{(c+a-b)^2}{(c-b)(a-b)}$$

$$= \frac{(A-2c)^2}{(a-c)(b-c)} + \frac{(A-2a)^2}{(b-a)(c-a)} + \frac{(A-2b)^2}{(c-b)(a-b)}$$

$$= \frac{(A-2c)^2 \cdot (b-c) + (A-2a)^2 \cdot (c-b) + (A-2b)^2 \cdot (a-c)}{(a-b)(b-c)(c-a)}$$

$$= \frac{L}{a-b)(b-c)(c-a)}$$

$\Leftrightarrow L = (A^2 - 4Ac + 4c^2)(b-a) + (A^2 - 4Aa + 4a^2)(c-b) +$

$+(A^2 - 4Ab + 4b^2)(a-c) = A^2((b-a) + (c-b) + (a-c)) -$

$-2A(c(b-a) + a(c-b) + b(a-c)) + 4(c^2(b-a) + a^2(c-b) + b^2(a-c))$

$= -4A(cb - ca + ac - ab + ba - bc) + 4N = 4N$

Yani,

$N = c^2(b-a) + a^2(c-b) + b^2(a-c) = c^2(b-a) + (a^2c - a^2b + b^2a - b^2c)$

$= c^2(b-a) + (a^2c - b^2c) - (a^2b - b^2a) = c^2(b-a) + c(a+b)(a-b) - ab(a-b)$

$= (a-b)(ca + cb - ab - c^2) = (a-c)(a(c-b) + c(b-c)) = (a-b)(b-c)(c-a)$.

Burdan $M = 4$ eder.

24.

Kümenin elemanlarını mod3'teki kalan sınıflarına göre üç gruba ayıralım;

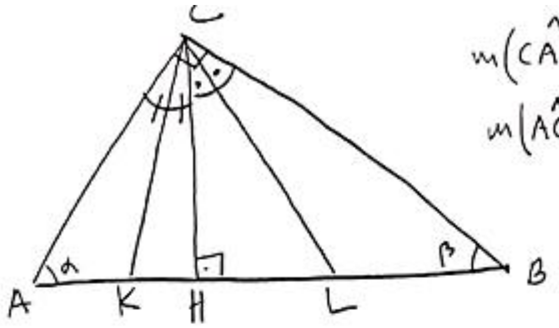
$A = \{3, 6, 9, \ldots 60\}$, $B = \{1, 4, 7, \ldots 61\}$ ve $C = \{2, 5, 8, \ldots 59\}$

İstenen şartı sağlayan alt kümeyi elde etmek için elemanların 3'ü de aynı kümeden seçilmeli veya her kümeden bir eleman seçilmelidir.

$s(A) = 20$, $s(B) = 21$, $s(C) = 20$ olduğundan

$\binom{20}{3} + \binom{21}{3} + \binom{20}{3} + \binom{20}{1}\binom{21}{1}\binom{20}{1} = 12010$ bulunur.

25.



$m(C\hat{A}B) = \alpha$ ve $m(C\hat{B}A) = \beta$ olsun

$m(A\hat{C}K) = m(K\hat{C}H) = \frac{\beta}{2}$ ve

$m(H\hat{C}L) = m(L\hat{C}B) = \frac{\alpha}{2}$ olur.

$m(A\hat{C}K) + m(C\hat{A}K) = m(C\hat{K}B) = m(K\hat{C}B)$ dir.

$|BC| = |KB|$ ve benzer şekilde

$|AC| = |AL|$ olur.

$|AK| = |AB| - |BK|$, $|BL| = |AB| - |AC|$, $|KL| = 4$ ve

$|AC| + |BC| + |AB| = 30$ kullanılarak $|AB| = 13$ bulunur.

26.

İlk olarak sonu 11 ile biten sayılarımızı ele alalım. Bu sayılarımız $(100x + 11)$ şeklindedir. (x negatif olmayan bir tamsayı olsun)

$(100x + 11)^2 = 100^2x^2 + 2 \cdot 100 \cdot 11 \cdot x + 121$
$= (100^2x^2 + 2 \cdot 100 \cdot 11 \cdot x) + 21 = 100(100x^2 + 2 \cdot 11 \cdot x + 1) + 21$ burdan anlıyoruz ki; $(100x + 11)^2$ ile $11^2 = 121$ sayısının son iki basamağı aynıdır. Aynı şekilde , $(100x + 12)^2$ ve $12^2 = 144$ sayılarının son iki basamakları aynıdır. Bundan dolayı; $11^2 + 12^2 + 13^2 + ... + 19^2 = 121 + 144 + ... + 361 = 2085$ eder. Son iki basamağı 85'tir.

27.

Verilenlerden $a_2 = 3, a_3 = 5, a_4 = 8, ...$ ve
$b_2 = 3, b_3 = 4, b_4 = 7, ...$ buluruz.
$a_0 = b_1, a_1 = b_0, a_2 = b_2$ ve $b_3 < a_3 < b_4 < a_4 < b_5$.
Tümevarımdan ıspatlarsak;

$m \geq 3$ için $b_m < a_m < b_{m+1}$ eder.
$m = 3$ ve $m = 4$ olduğu durumlarda kuralımız doğrulanır.
Şimdi $b_k < a_k < b_{k+1}$ ve $b_{k+1} < a_{k+1} < b_{k+2}$ olarak varsaydık.
Bu iki eşitsizliği birbirine eklersek ;

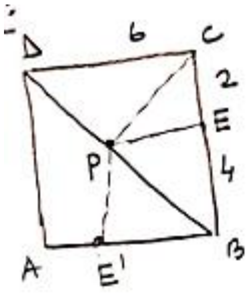
$b_k + b_{k+1} < a_k + a_{k+1} < b_{k+1} + b_{k+2} \Rightarrow b_{k+2} < a_{k+2} < b_{k+3}$

elde ederiz ve bu diziler sadece üç ortak tamsayıya sahiplerdir bu sayılar; 1,2 ve 3'tür.

28.

Çözüm: En eski izci A olsun. 5 farklı yol ile partnerini bulabilir. Birinci günkü partneri de B olsun. 4 farklı partnerden biri olan C yi B ikinci gün sesin. A tekrar seçilemez. C birinci gün 3 farklı partner seçebilir. Seçtiği partner D olsun. D nin 2 seçimi kalır. 2 gününde E partnerini seçsin. B, C çift ve A iki gün de seçildi. Sonuç olarak $5.4.3.2 = 120$

29.



E noktasının BD ye göre simetriği olan E' noktası AB üzerindedir.

$|PE| = |PE'|$ olduğundan

$|PC| + |PE| = |PC| + |PE'|$ olur. Bu toplamın en küçük olması için C, P ve E' doğrusal alınırsa $|CE'|^2 = 4^2 + 6^2$

$|CE'| = |PC| + |PE| = 2\sqrt{13}$ bulunur.

30.

$ebob(a, b) = d$, x ve y aralarında asal olsunlar; $a = dx$ ve $b = dy$. Ekok'umuz;

$ekok[a, b] = \dfrac{ab}{ebob(a, b)} = \dfrac{dx \cdot dy}{d} = dxy$. Bulduğumuz bu değerleri denklemimizde yerine yazarsak;

$$a.ebob(a, b) + b.ekok[a, b] = a^2 + b^2 = d^2x + d^2xy^2 = d^2x^2 + d^2y^2$$

$$= x + xy^2 = x^2 + y^2 = (x-1)(x-y^2) = 0 \Rightarrow x = 1$$

veya $x = y^2$ dur. x ve y aralarında asal oldukları için $x = y^2$ denkleminin sadece $x = 1$ ve $y = 1$ olduğu durumda sağlanır. Zaten $x = 1$'i elde etmiştik. Burdan; $a = dx = d$ ve $b = dy = d$ burdan y doğal sayı olmak üzere $\Rightarrow b = ay$ olarak bulunur.

$$2010^b - 1 = (2010^a)^y - 1 = (2010^a - 1) \cdot ((2010^a)^{y-1} + \ldots + 2010^a + 1)$$ yazılırsa

$(2010^a - 1, 2010^b - 1) = 2010^a - 1$ olduğu görülür.

31.

Çözüm:

$(x-1)^2 \geq 0$, $x^2+1 \geq 2x$ ve benzer şekilde $y^2+4 \geq 4y$, $z^2+9 \geq 6z$ olduğunu biliyoruz.

$$\frac{1}{x^2+1}+\frac{1}{y^2+4}+\frac{1}{z^2+9} \leq \frac{1}{2x}+\frac{1}{4y}+\frac{1}{6z} \quad (1) \text{ yazılabilir.}$$

Cauchy Shworz eşitsizliği uygulanırsa

$$\left(\frac{1}{2x}\right)^2+\left(\frac{1}{4y}\right)^2+\left(\frac{1}{6z}\right)^2 \leq \left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{6^2}\right)\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2}\right)$$

~~bulunur.~~ ~~buradan~~

$$\frac{1}{2x}+\frac{1}{4y}+\frac{1}{6z} \leq \frac{7}{12}\sqrt{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2}} \quad (2)$$

bulunur.

(1) ve (2) den

$$\frac{1}{x^2+1}+\frac{1}{y^2+4}+\frac{1}{z^2+9} \leq \frac{7}{12}\sqrt{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2}} \text{ bulunur.}$$

Buradan $x=1$, $y=2$ ve $z=3$ olur

$x+y+z=1+2+3=6$ bulunur.

32.

Seçtiğimiz maça, kupa ve karo kartlarında yazan sayılar sırasıyla a, b ve c olsun.

$a=\{1,2,3,4\}$ $b=\{1,2,3,4,5,6\}$ $c=\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ olmak üzere $7 \mid a+b+c$ olması isteniyor.

$a+c$ toplamı 7'nin katı değilse 7 ile bölümünden kalan k olmak üzere $1 \leq k \leq 6$ olur. b'nin alabileceği değerler mod 7'nin kalan sınıfları kümesi olduğundan ~~a+c~~ $a+c+b$ toplamını 7'nin katı yapacak şekilde bir b sayısı bulunur. Fakat $a+c$ toplamı 7'nin katı ise $a+c+b$'nin 7'nin katı olmasını sağlayan b değeri bulunmaz.

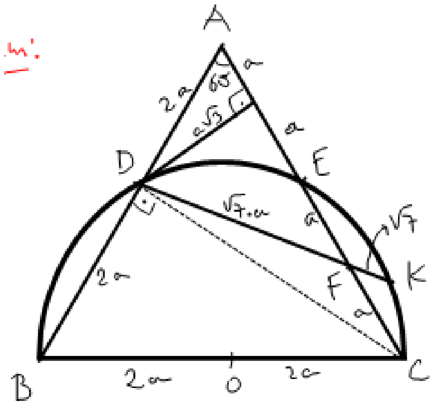
$a+c$ toplamı $\binom{4}{1}\binom{8}{1}=32$ farklı şekilde yazılabilir.

$(a,c)=(1,6),(2,5),(3,4),(4,3)$ ikilileri istediğimiz sonucu vermediğinden ~~[illegible]~~ $32-4=28$ yolla istenilen seçim yapılabilir.

ENGİN DENEME ÇÖZÜMLER

1.

ım:



D ve E kenarları bulundukları kenarların orta noktalarıd

$|DF|$'nu bulmak için D'den AC'ye dik inelim.

Pisagor bağıntısı gereği $|DF| = \sqrt{7}a$ bulunur.

E noktasının iç kuvveti gereği $\sqrt{7}.a.\sqrt{7} = a.a \Rightarrow$

$a = 7$ bulunur. $r = 2a = 2.7 = 14$ tür.

Cevap: C

2.

Denklemi mod 7'de inceleyelim.

$8x^3 - 13y^3 \equiv x^3 + y^3 \equiv 3 \pmod 7$, mod 7'de küp kalanlar $0, \mp 1$ olduğ

iki küp toplamı mod 7'de 3 olamaz. Dolayısıyla çözüm yok.

Cevap: A

3.

Çözüm: $x_1 + x_2 = 2a+1$, $x_1.x_2 = a$, $x_3 + x_4 = 4-a$ ve $x_3.x_4 = a-1$ bulunur.

$$\frac{x_1.x_2 + x_3.x_4}{x_2.x_3} = \frac{x_1.x_4.(2a+1+4-a)}{a} \Rightarrow \frac{a+a-1}{x_2.x_3} = \frac{x_1.x_4(a+5)}{a} \Rightarrow a.(2a-1) = a.(a-1).(a+$$

$a \neq 0$ olduğundan $2a-1 = a^2+4a-5 \Rightarrow a^2+2a-4=0 \Rightarrow \Delta > 0$ olduğundan

$a_1 \neq a_2 \in \mathbb{R}$ bulunur. Cevap: C

4.

özüm:

A masasındaki kitaplar D masasında tek türlü sıralanabilir.

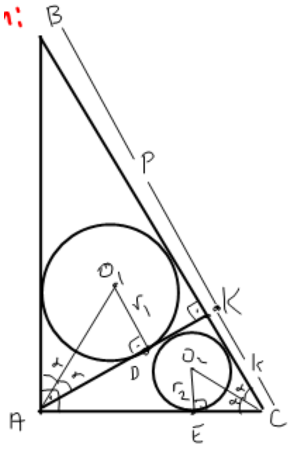
Aynısı B ve C masasındaki kitaplar için de geçerli olduğundan

çözüm "aaaabbbccccc" nin sıralanış sayısı olan

$$\frac{(4+3+5)!}{4!.3!.5!} = 27720 \text{ dir.}$$ Cevap: C

5.

Çözüm:



Öklit bağıntısı gereği $|AK|^2 = p.k$ bulunur.

$\widehat{ABK} \sim \widehat{CAK}$ (A.A) olduğundan

Benzerlik oranı $= \dfrac{r_1}{r_2} = \dfrac{p}{|AK|} = \dfrac{p}{\sqrt{p.k}} = \sqrt{\dfrac{p}{k}}$ bulunur.

$\widehat{AO_1D} \sim \widehat{CO_2E}$ (A.A) olduğundan

Benzerlik oranı $= \dfrac{|AO_1|}{|CO_2|} = \dfrac{r_1}{r_2} = \sqrt{\dfrac{p}{k}}$ bulunur.

Cevap: A

6.

Çözüm.

$a^2+3a+5 \equiv a^2-8a+16 \equiv (a-4)^2 \equiv 0 \pmod{11} \Rightarrow a \equiv 4 \pmod{11} \Rightarrow a = 11k+4$ $(k \in$

Şimdi a'yı orijinal denklikte yerine yazalım.

$(11k+4)^2+3.(11k+4)+5 \equiv 121k^2+88k+16+33k+12+5 \equiv 33 \not\equiv 0 \pmod{121}$

olduğundan çözüm yoktur. Cevap: A

7.

Çözüm:

$ax^5+b.x^4+1 = (x^2-x-1).Q(x)$ olsun. x^2 yerine $(x+1)$ yazalım.

$x^4=(x^2)^2=(x+1)^2=x^2+2x+1=x+1+2x+1=3x+2$ ve $x^5=x^4.x=(3x+2).x=3x^2+2x=3(x+1)+2x=5x+3$ olur

$a.(5x+3)+b.(3x+2)+1=(5a+3b)x+3a+2b+1=0 \Rightarrow 5a=-3b$ ve $3a+2b+1=0$ olmalıdır.

$a=3k$ ve $b=-5k$ dersek $3.3k+2.(-5k)+1=0 \Rightarrow k=1 \Rightarrow a=3$ ve $b=-5$ bulunur.

Dolayısıyla sadece $(a,b)=(3,-5)$ ikilisi çözümdür. Cevap: B

8.

Çözüm.

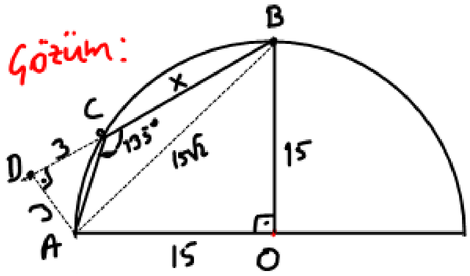
En kötü senaryo gereği her sırada farklı şekilde otursunlar ilk sırada 6 kişi, sonraki $\binom{6}{5}=6$ sırada 5'er kişi, sonraki $\binom{6}{4}=15$ sırada 4'er kişi v.s. otursunlar. Yani,

$$\binom{6}{6}.6+\binom{6}{5}.5+\binom{6}{4}.4+\binom{6}{3}.3+\binom{6}{2}.2+\binom{6}{1}.1=192 \text{ kişi}$$

farklı şekilde oturmuş olacaklar. Uçakta 193 kişi bulunursa (güvercin yuvası prensibi) en az iki sırada oturan yolcuların koltuk numaraları aynı olur. Cevap: D

9.

Çözüm:



$m(A\hat{C}B)=135^\circ$ olduğu görüldükten sonra $|AD|=3$ ve $|AB|=15\sqrt{2}$ bulunur. ADB üçgeninde pisagor bağıntısı uygular $(x+3)^2+9=450 \Rightarrow (x+3)^2=441 \Rightarrow x+3=21 \Rightarrow$ bulunur. Cevap: B

10.

Çözüm:

$n^2+n+5=a^2 \Rightarrow 4n^2+4n+1+19=4a^2 \Rightarrow (2a)^2-(2n+1)^2=19 \Rightarrow (2a+2n+1).(2a-2n-1)=1$ bulunur. $a>0$ varsayabileceğimizden $2a+2n+1>2a-2n-1$ olur.

$2a+2n+1=19$ ve $2a-2n-1=1 \Rightarrow a=5$ ve $n=4$ bulunur.

Başka çözüm olamaz. Cevap: B

11.

Çözüm: ilk olarak $f(n)$'i sağ tarafa atalım ve n yerine $n-1$ yazalım.

$f(1)+f(2)+\dots+f(n-1)=(n^2-1).f(n)$ ve $f(1)+f(2)+\dots+f(n-1)=(n-1)^2.f(n-1)$ eşitlikleri elde edilir. Buradan $(n^2-1).f(n)=(n-1)^2.f(n-1) \Rightarrow \dfrac{f(n)}{f(n-1)}=\dfrac{n-1}{n+1}$ elde edil

n yerine $2,3,4,\dots,n-1,n$ verip taraf tarafa çarparsak

$$\frac{f(2)}{f(1)}\cdot\frac{\cancel{f(3)}}{\cancel{f(2)}}\cdot\frac{\cancel{f(4)}}{\cancel{f(3)}}\cdots\frac{\cancel{f(n-1)}}{f(n-2)}\cdot\frac{f(n)}{\cancel{f(n-1)}}=\frac{1}{\cancel{3}}\cdot\frac{2}{\cancel{4}}\cdot\frac{\cancel{3}}{\cancel{5}}\cdots\frac{\cancel{n-2}}{n}\cdot\frac{\cancel{n-1}}{n+1} \Rightarrow \frac{f(n)}{f(1)}=\frac{1.2}{n.(n+1)}$$

$f(n)=\dfrac{4010}{n.(n+1)}$ fonksiyonu bulunur. $f(2004)=\dfrac{4010}{2004.2005}=\dfrac{1}{1002}$ bulunur.

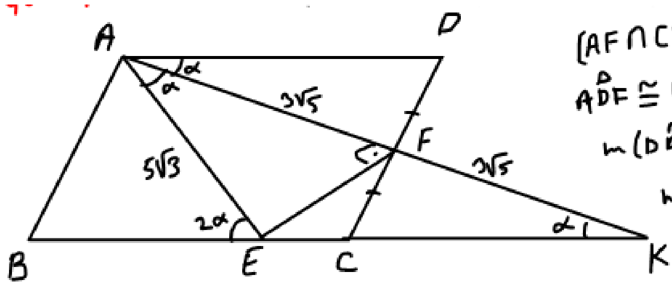
Cevap: D

12.

Çözüm: Bir sayı 1 azaltıldığında tekse çift, çiftse tek oluyor. Her işlem sonucu sayılar TÇTÇTÇTÇ şeklindeki gibi 4 tek ve 4 çift olacak şekilde sıralanacak. Yani rakamlar toplamı ≥ 4 olur. 4 için örnek durum belirleyelim.

	1	2	3	4	5	6	
3 hamlede →	1	0	3	2	5	4	
+ 2 hamlede →	1	0	1	2	3	4	
+ 2 hamlede →	1	0	1	0	3	2	
+ 1 hamlede →	1	0	1	0	1	2	
+ 1 hamlede →	1	0	1	0	1	0	elde edilir.

13.



$[AF \cap [BC = \{K\}$ olsun.

$\overset{\triangle}{ADF} \cong \overset{\triangle}{KCF}$ (A.K.A) olduğundan

$m(D\widehat{A}F) = m(F\widehat{K}C) = \alpha$ ve $|AF| = |FK|$ olur.

$m(E\widehat{A}K) = 2\alpha - \alpha = \alpha$ bulunur

$\overset{\triangle}{AEK}$ ikizkenar olduğundan

$m(A\widehat{F}E) = 90^\circ$ dir.

Pisagor bağıntısı gereği $(5\sqrt{3})^2 = (3\sqrt{5})^2 + |EF|^2$ dir.

$|EF| = \sqrt{30}$ ve Alan$(\overset{\triangle}{AFE}) = \dfrac{3\sqrt{5}\cdot\sqrt{30}}{2} = \dfrac{15\sqrt{6}}{2}$ bulunur.

Cevap: C

14.

Çözüm: $2002+2$ ile 2002^2+2 sayılarının EBOB'unu bulalım.

$$(\underbrace{2002+2\,,\,2002^2+2}_{\text{2002 ile çarpıp çıkaralım}}) = (\underbrace{2002+2\,,\,-2.2002+2}_{\text{2 ile çarpıp toplayalım}}) = (2002+2\,,\,6) = (2004,6) = 6$$

Ayrica $2002^n+2 \equiv 1^n+2 \equiv 3 \equiv 0 \pmod 3$ ve $2002^n+2 \equiv 0 \pmod 2$ olduğundan verilen sayıların EBOB'u 6 bulunur. Cevap: B

15.

Çözüm:

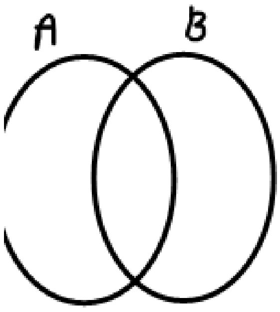
$f(1), f(2), \dots, f(n-1)$'in her birinin eşleşebileceği 2 seçenek var.

Toplamın tek sayı olabilmesi için $f(n)$'in eşleşebileceği

yalnız 1 durum var. Buna göre, fonksiyon sayısı $2^{n-1}\cdot 1$ bulu

Cevap: B

16.



S'nin her elemanı ya $A\setminus B$'ye, ya $B\setminus A$'ya,

ya da $A\cap B$'ye gidecek. Yani her eleman için

3 durum var $\Rightarrow 3^5 = 243$ seçenek var.

(A,B) ikilisiyle (B,A) ikilisi aynı olduğu için

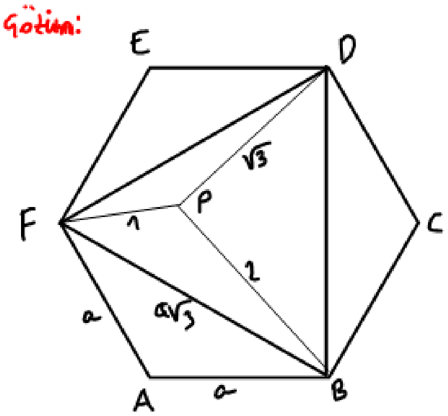
cevap $\frac{243-1}{2}+1 = 122$ olacaktır.

Buradaki 1 durum $A=B=S$ olduğu durumdur. $(A\setminus B = B\setminus A = \emptyset)$

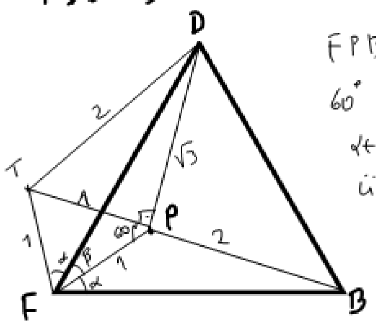
Cevap: B

17.

Çözüm:



FDB üçgeninin eşkenar üçgen olduğu görülür.



FPB üçgenini, F noktası etrafında 60° saat yönünün tersinde döndüreli

$\alpha+\beta=60°$ olduğundan FTP eşkenar üçgendir. TPD üçgeninde

$1^2+(\sqrt{3})^2=2^2$ olduğundan $m(\widehat{TPD})=$9

bulunur.

FBD üçgeninde $m(\widehat{FPD})=150°$ olduğundan cos. teoremi uygulayalım.

$(a\sqrt{3})^2 = 1+3-2\cdot 1\cdot\sqrt{3}\cos 150° \Rightarrow 3a^2 = 4+2\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow a=\sqrt{\frac{7}{3}}$

Çevre(ABCDEF) $= 6\cdot\sqrt{\frac{7}{3}} = 2\sqrt{21}$ bulunur. Cevap: E

18.

Çözüm.

$n \equiv S(n) \pmod 3$ olduğundan her n için $3 | n - S(n)$ dir.

$2 | n - S(n)$ olması için çift sayıların rakamları toplamı çift, tek sayıların rakamları toplamı tek olmalıdır.

$(abcdef)$ sayısında f tek ise a, b, c, d'yi rastgele alırız ve e'yi 5 yolla seçeriz. f çift ise e yine 5 yolla seçilir.

Buna göre, $\underset{9}{a} \cdot \underset{10}{b} \cdot \underset{10}{c} \cdot \underset{10}{d} \cdot \underset{5}{e} \cdot \underset{10}{f} = 5 \cdot 9 \cdot 10^4$ tane sayı vardır. Cev

19.

Çözüm:

Denklem simetrik olduğundan yani x yerine y, y yerine x yazdığımızda denklem değişmediğinden $x \geq y$ kabul edelim.

$(xy)^2 - 14xy + 49 = x^2 + y^2 \Rightarrow (xy)^2 - 16xy + 64 - 15 = (x-y)^2 \Rightarrow (xy-8)^2 - (x-y)^2 = 15 \Rightarrow$

$(xy - 8 - x + y)(xy - 8 + x - y) = 15$ elde edilir.

$$\begin{aligned}
xy - 8 + x - y &= 15,\ 5,\ -3,\ -1 \\
+\quad xy - 8 - x + y &= 1,\ 3,\ -5,\ -15 \\
\hline
2xy - 16 &= 16,\ 8,\ -8,\ -16 \\
2xy &= 32,\ 24,\ 8,\ 0 \\
x \cdot y &= 16,\ 12,\ 4,\ 0
\end{aligned}$$

$x \cdot y = 16$ ve $x \cdot y = 4$ orijinal denklemi sağl

$x \cdot y = 12$ için $(4,3)$ ve $(3,4)$ sağlar

$x \cdot y = 0$ için $(7,0)$ ve $(0,7)$ sağlar.

Toplam 4 çözüm var. Cevap: C

20.

Çözüm:

n kümeden hangi farklı ikisini alırsak alalım, bu kümelerin 5 ortak elemanı bulunmalı ki ortak olmayan elemanlardan oluşan küme 10 elemanlı olup n kümenin içinde bulunsun.

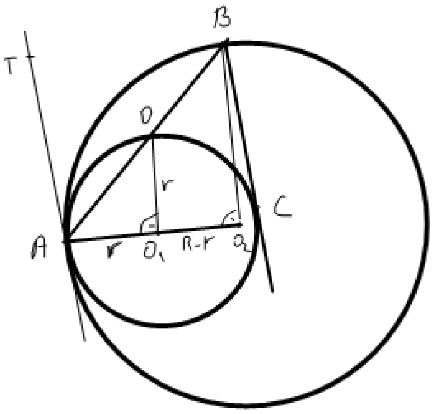
$A = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, b_1, b_2, b_3, b_4, b_5\}$ ve $B = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, c_1, c_2, c_3, c_4, c_5\}$ kümelerinin yalnızca birine ait olan tüm elemanlardan oluşan küme $C = \{b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, c_1, c_2, c_3, c_4, c_5\}$ verilen koşul gereği n kümenin içinde

A, B ve C kümelerinin dışında bir D kümesi düşünülemez. Çünkü A ya, B veya C'den 5'er ortak olmayan elemanlarından oluşan küme ortak olmayan elemana sahip olamaz. Dolayısıyla dördüncü bir küme olamaz.

Cevap: A

21.

Çözüm:



r ve R yarıçaplı çemberlerin merkezleri sırasıyla O_1 ve O_2

$\frac{1}{2}.m(\widehat{TAB})=m(\widehat{AO_1D})=m(\widehat{AO_2B})$ olduğundan $DO_1 // BO_2$ dır

Soruda oran istediği için $|BC|=1$, $|AB|=2$ olsun.

B noktasının O_1 çemberine göre dış kuvvetini alırsak

$|BC|^2=|BD|.|BA| \Rightarrow 1^2=|BD|.2 \Rightarrow |BD|=\frac{1}{2}$ ve $|AD|=\frac{3}{2}$ bul.

Temel benzerlik teoremi gereği

$\frac{r}{R}=\frac{|AD|}{|AB|}=\frac{3/2}{2}=\frac{3}{4}$ bulunur. Cevap: A

22.

Çözüm!

2, 7, 9'un bulunmadığı çift sayılar $6.7^6.4=24.7^6$ tanedir.

Bunlardan 3'ü içermeyenler $5.6^6.4=20.6^6$ ve 5'i içermeyenler de 20.6^6 tane

3 ve 5'i içermeyenler $4.5^6.4=16.5^6$ tane olduğundan içerme - dışarma prensibi gereği

cevap $24.7^6-40.6^6+16.5^6$ bulunur. Cevap: D

23.

Çözüm:

$\sqrt{2n+1}=a$ ve $\sqrt{2n-1}=b$ olsun. $a^2+b^2=4n$ olur. $f=\frac{a^2+b^2+a.b}{a+b}=\frac{a^3-b^3}{a^2-b^2}=\frac{\sqrt{2n+1}^3 ...}{2n+1}$
$(a-b)$

$f(n)=\frac{1}{2}\left(\sqrt{2n+1}^3-\sqrt{2n-1}^3\right) \Rightarrow$

$f(1)=\frac{1}{2}\left(\cancel{\sqrt{3}^3}-\sqrt{1}^3\right)$

$f(2)=\frac{1}{2}\left(\cancel{\sqrt{5}^3}-\cancel{\sqrt{3}^3}\right)$

$\vdots$

$f(40)=\frac{1}{2}\left(\sqrt{81}^3-\cancel{\sqrt{79}^3}\right)$

$+$

$S=\frac{1}{2}\left(\sqrt{81}^3-\sqrt{1}^3\right)=\frac{1}{2}(729-1)=364$ Cevap:

24.

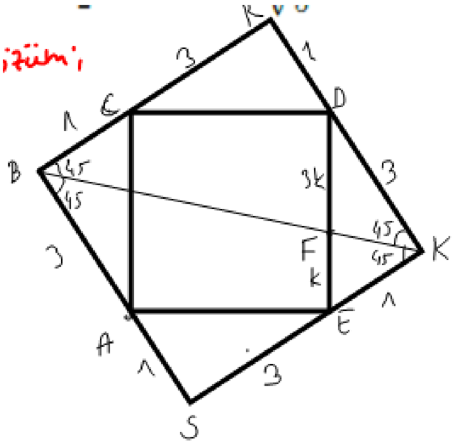
m: Sekiz oyuncunun ismi A, B, C, D, E, F, K ve L olsun.

$\boxed{AB}$ $\boxed{CD}$ $\boxed{EF}$ $\boxed{KL}$ koşuluna uygun sıralama $\frac{8!}{2!.2!.2!.2!}=7.6.5.4.3$ farklı şekilde

akımların ismi olmadığından $\frac{7.6.5.4.3}{4!}=105$ farklı şekilde oturulabilir. Cevap: A

25.

Çözüm;



ACDE karesini çevreleyen BRKS karesi çizilir.
$|BK| = 4\sqrt{2}$ dir.

Açıortay teoremi gereği $\dfrac{|DF|}{|FE|} = \dfrac{3}{1}$ dır.

Pisagor teoremi gereği $|DE|^2 = 9 + 1 = 10 \Rightarrow |DE| = \sqrt{10}$,
$|FE| = \dfrac{\sqrt{10}}{4}$ ve $|DF| = \dfrac{3\sqrt{10}}{4}$ bulunur.

[FK] açıortayının uzunluğu $|FK|^2 = 3.1 - \dfrac{\sqrt{10}}{4} \cdot \dfrac{3\sqrt{10}}{4} = 3 - \dfrac{30}{16} =$

$|FK| = \dfrac{3}{2\sqrt{2}}$ bulunur.

$|BF| = |BK| - |FK| = 4\sqrt{2} - \dfrac{3}{2\sqrt{2}} = \dfrac{13}{2\sqrt{2}} \Rightarrow \dfrac{|BF|}{|EF|} = \dfrac{\frac{13}{2\sqrt{2}}}{\frac{\sqrt{10}}{4}} = \dfrac{13}{2\sqrt{2}} \cdot \dfrac{4}{\sqrt{1}}$

Cevap: C

26.

Denklemi mod 5'te inceleyelim.

$x^5 + y^5 = (x+2)^5 + (y-3)^5$ Fermat teoremi gereği,

$x + y \equiv x + 2 + y - 3 \pmod 5$

$0 \not\equiv -1 \pmod 5$ olduğundan çözüm yok.

Cevap: A

27.

Çözüm:

$A(n) = \left[\left|\dfrac{n^2}{1998}\right|\right]$ olsun. $0 \leq A(n) \leq \left[\left|\dfrac{1997^2}{1998}\right|\right] = \left[\left|\dfrac{(1998-1)^2}{1998}\right|\right] = \left[\left|1998 - 2 + \dfrac{1}{1998}\right|\right]$

$\dfrac{(n+1)^2}{1998} - \dfrac{n^2}{1998} = \dfrac{2n+1}{1998} \Rightarrow 2n+1 = 1997 \Rightarrow n = 998$ olduğuna göre $n = 1, 2, \ldots, 998$ için

$0 \leq A(n) \leq \left[\left|\dfrac{998^2}{1998}\right|\right] = 498$ olacak ve bu aralıktaki her değeri alacaktır.

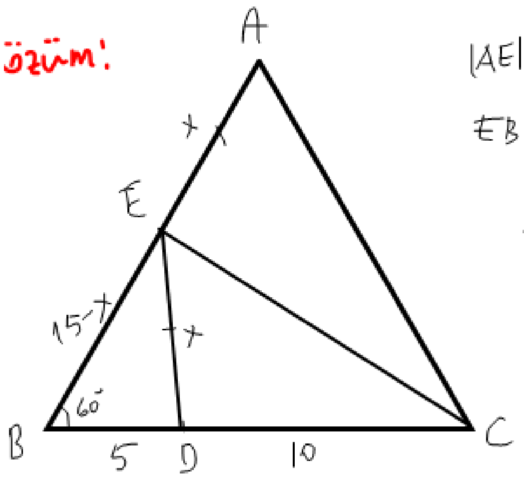
$n > 498$ için $A(n+1) \neq A(n)$ olur. Dolayısıyla ilk durumdan $498 + 1 = 499$,
ikinci durumdan $1997 - 998 = 999$ farklı değer alacağından
toplamda $499 + 999 = 1498$ farklı değer alır. Cevap: D

28.

İ, İ, İ, L, L harflerinin kendi içindeki dizilimlerinin $\frac{3}{5}$'ü İ ile başlayacağından ve diğer harflerin dizilimi önemsiz olduğundan istenen olasılık değeri $\frac{3}{5}$ bulunur. Cevap: E

29.

özüm:



$|AE| = |ED| = x$ dersek $|BE| = 15 - x$ olur.

EBD üçgeninde cosinüs teoremi uygulayalım.

$$x^2 = 25 + 225 - 30x + x^2 - 2.5.(15-x).\cos 60$$

$$0 = 250 - 30x - 75 + 5x \Rightarrow 25x = 175 \Rightarrow x$$

EBC üçgeninde cosinüs teoremi uygulayalım.

$$|EC|^2 = 225 + 64 - 2.15.8.\frac{1}{2} = 289 - 120 = 169$$

$|EC| = 13$ bulunur. Cevap: B

30.

Çözüm,

$$\frac{1}{5}.n^5 + \frac{1}{3}.n^3 + \frac{7}{15}.n = \frac{3n^5 + 5n^3 + 7n}{15} = A \text{ diyelim.}$$

Fermat teoreminden $3n^5 + 5n^3 + 7n \equiv 2n^3 + n \equiv 2n + n \equiv 3n \equiv 0 \pmod 3$ ve $3n^5 + 5n^3 + 7n \equiv 3n + 2n \equiv 5n \equiv 0 \pmod 5$ olduğundan

$3n^5 + 5n^3 + 7n \equiv 0 \pmod{15}$ olur. Dolayısıyla her n pozitif tamsayısı için A t

Cevap: E

31.

Çözüm:

Permütasyon eşitsizliği gereği $x^2+y^2+z^2 \geq xy+yz+zx \Rightarrow$ $x^2+y^2+z^2 \geq 26$ olur. Örnek durum $(x,y,z)=(2,3,4)$ için $xy+yz+zx = 2.3+3.4+4.2 = 6+12+8 = 26$ ve $x^2+y^2+z^2 = 4+9+16 = 29$ bulunur.

Cevap: E

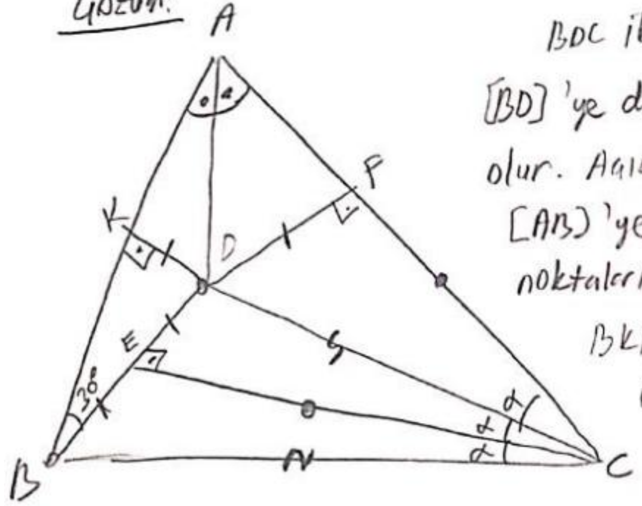
32.

Çözüm: $a_1+a_2+a_3+\dots+a_{10}=62$ olduğuna göre, içinde hiç 3'ün katı olmayan en küçük pozitif tamsayıları $1+2+4+5+7+8+10+11+13+14>62$ dir. O zaman 3'ün katı sayı bulunmalıdır. Aynı şekilde 4'ün katı yoksa $1+2+3+5+6+7+9+10+11+13>62$ dır. O zaman 4'ün katı sayı bulunmalı. 5'in katı yoksa $1+2+3+4+6+7+8+9+11+12>62$ dır. O zaman 5'in katı sayı da bulunacağından bu 10 sayının çarpımı $3.4.5=60$'a böl Şimdi A şıkkı için $1+2+3+4+5+6+7+8+9+17=62$, B şıkkı için $1+3+4+5+6+7+9+10+11+13=$ ve C şıkkı için $1+2+3+4+5+6+7+10+11+13=62$ örnekleri sırasıyla 26, 32 ve 54 ile ~~tam~~ bölünemediği durumları gösterir. Cevap: D

TUĞBANUR DENEME ÇÖZÜMLER

1.

Çözüm:



BDC ikizkenar üçgen olduğundan, C'den [BD]'ye dik indirildiğinde $|BE|=|ED|$ ve $m(D\hat{C}E)=m(E\hat{C}B)$ olur. Açıortay tanımı gereği D'den, [AC] ve [AB]'ye inilen dikme ayakları sırasıyla F ve K noktaları olsun. $|DE|=|DF|=|DK|$ olur. BKD dik üçgeninde $|BD|=2|KD|$ olduğundan $m(D\hat{B}A)=30°$ olur.

Cevap: A

2.

2) $(a,35)=1$ olduğundan $(a,5)=(a,7)=1$ dir. Fermat teoremi gereği $a^4\equiv 1 \pmod 5$ olduğundan $(a^4-1)(a^4+15a^2+1)\equiv 0 \pmod 5$'tir.

$a^6\equiv 1 \pmod 7$ olduğundan $(a^4-1)(a^4+15a^2+1)\equiv (a^2+1)(a^2-1)(a^4+a^2+1)\equiv (a^2+1)(a^6-1)\equiv 0 \pmod 7$ olduğundan $(a^4-1)(a^4+15a^2+1)\equiv 0 \pmod{35}$

Ayrıca $a=2$ için $(a^4-1)(a^4+15a^2+1)\not\equiv 0 \pmod 2$ olduğundan n'nin en büyük değeri 35 olur.

Cevap: C

3.

Çözüm: $x^2+x+1=0 \Rightarrow (x-1)(x^2+x+1)=0 \Rightarrow x^3-1=0 \Rightarrow x^3=1$ dir

$x^{2021}=(x^3)^{673}\cdot x^2=x^2$ ve $x^{2022}=(x^3)^{674}=1$ elde edilir. Buradan

$\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)^2+(1+1)^2=x^4+2+\frac{1}{x^4}+4=x+\frac{1}{x}+6$ bulunur.

$x^2+x+1=0 \Rightarrow x+1+\frac{1}{x}=0 \Rightarrow x+\frac{1}{x}=-1$ olduğundan.

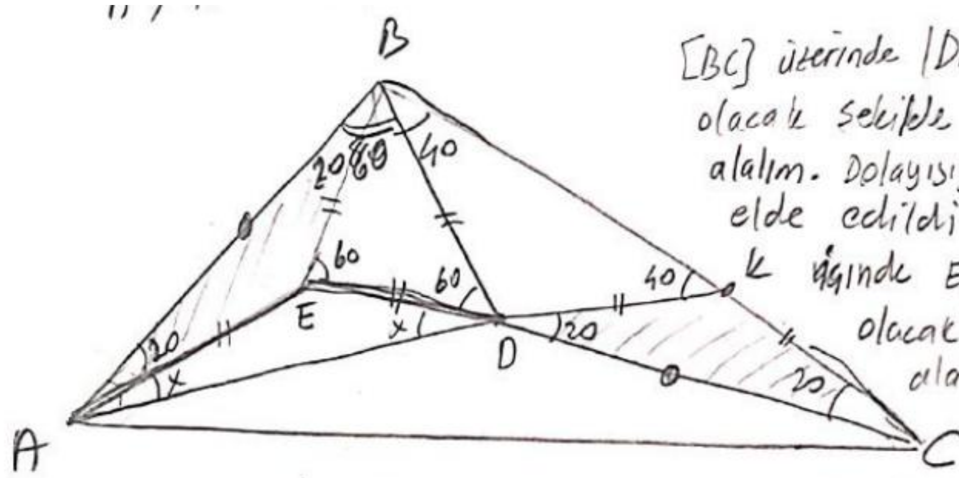
$x+\frac{1}{x}+6=-1+6=5$ bulunur. Cevap: D

4.

Herhangi bir kartın üzerinde ya a, ya da b yazıyor olsun.
Herhangi bir kartın üzerinde a ve b'den farklı bir c sayısı
olamaz. Çünkü 16 ve 18 dışında en az bir sonuç daha elde
edilirdi. Buna göre olası tüm toplamlar $a+a+a=3a$, $a+b+b=a+2b$,
$a+a+b=2a+b$ ve $b+b+b=3b$ dir. Fakat elimizde sadece 18
... $3b$ dir Fakat elimizde sadece 18
3'ün katı olduğundan $(2a+b)+(a+2b)=3a+3b$ de olamaz. O zaman
tek durumu genelleme yaparsak $a+a+a=18$ ve $a+a+b=16$ olup
$a=6$ ve $b=4$ bulunur. Şimdi sağlama yapalım 5 kartta 6, 1 kartta 4
yazmalı ki $\binom{5}{3}=10$ tane 18 ve $\binom{5}{2}=10$ tane 16 elde edilir.
Demek ki bu kartların üzerinde yazan en küçük sayı 4 olmalı.

Cevap: D

5.



[BC] üzerinde $|DK| = |KC|$ olacak şekilde K noktası alalım. Dolayısıyla $|BD| = |DK|$ elde edildi. ABD üçgeninin içinde EBD eşkenar üçgen olacak şekilde E noktası alalım.

Buradan $\overset{\triangle}{KDC} \cong \overset{\triangle}{EAB}$ (KAK) olduğu görülür. Dolayısıyla $|AE| = |EB| = |ED|$ olduğundan $2x + 20 + 80 + 60 = 180$ 'den $x = 10$ bulunur.

istenen açı $x + 20 = 10 + 20 = 30$ bulunur. Cevap: C

6.

6) $a=1$ olursa denklem sağlanmaz. Bu yüzden denklemi $\frac{a^2+1}{a-1} = \frac{2b^2-3}{2b-1}$ olacak şekilde düzenleyebiliriz. $b \in \{-1,0,1\}$ için sol tarafın payı pozitif iken sağ tarafın payı negatif olduğu için bu durumları inceleyelim. $b=-1$ için $3a^2-a+4=0$ olur ve denklemin çözümü yoktur. $b=0$ için $a^2-3a+4=0$ olur ve yine denklemin çözümü yoktur. $b=1$ için $a^2+a=0$ olur. Buradan $(0,1)$ ve $(-1,1)$ çözüm ikilileri elde edilir. Şimdi $2b^2-3>0$ durumunu inceleyelim. $(a^2+1, a-1)=(a+1, a-1)=(2, a-1)=1$ veya 2, $(2b^2-3, 2b-1)=(b-3, 2b-1)=(b-3, 5)=1$ veya 5 olduğundan

i) sol ve sağ tarafın paydaları aralarında asal ise $a-1=2b-1$ ve $a^2+1=2b^2-3 \Rightarrow 4b^2+1=2b^2-3 \Rightarrow 2b^2=-4$ çözüm gelmez

ii) Sol taraf 2 ile sadeleşir ve sağ taraf sadeleşmez ise $a^2+1=2(2b^2-3)$ ve $a-1=2(2b-1) \Rightarrow (4b-1)^2+1=4b^2-6 \Rightarrow$ $12b^2-8b+8=0$ elde edilir ($\Delta<0$) çözüm gelmez.

iii) sol taraf sadeleşmez ve sağ taraf 5 ile sadeleşir ise $5(a^2+1)=2b^2-3$ ve $5(a-1)=2b-1 \Rightarrow 3b^2-8b-28=0 \Rightarrow b=-2$ ve $a=0$ bulunur. Buradan $(0,-2)$ çözüm ikilisi gelir.

iv) sol taraf 2 ile, sağ taraf 5 ile sadeleşir ise $5(a^2+1)=2(2b^2-3)$ ve $5(a-1)=2(2b-1) \Rightarrow b^2-6b-16=0 \Rightarrow$ $b=8$ iken $a=7$ ve $b=-2$ iken $a=-1$ bulunur. Buradan $(7,8)$ ve $(-1,-2)$ çözüm ikilileri gelir. Buna göre 5 çözüm ikilisi bulunur.

Cevap: B

7.

7) $\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}} \cdot \frac{x-\sqrt{x^2+1}}{x-\sqrt{x^2+1}} = \frac{x-\sqrt{x^2+1}}{x^2-x^2-1} = -x+\sqrt{x^2+1}$ olduğundan

$y+\sqrt{y^2+1} = -x+\sqrt{x^2+1}$ (*) elde edilir. Benzer şekilde

$x+\sqrt{x^2+1} = -y+\sqrt{y^2+1}$ (**) elde edilir. * ve ** taraf tarafa

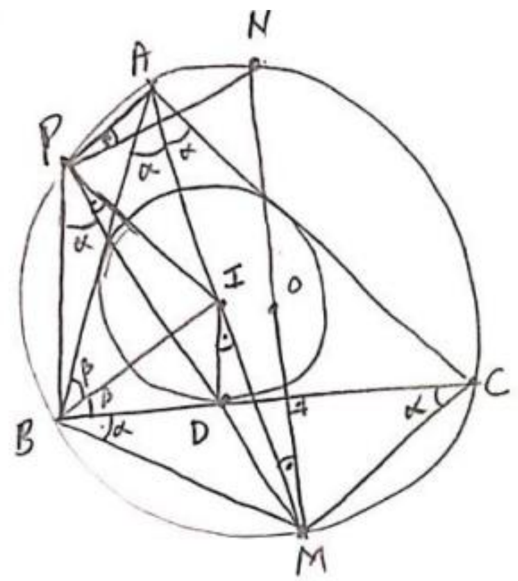
toplanırsa $x+y=-x-y \Rightarrow x+y=0$ bulunur. Cevap: E

8.

8) Kullanılacak kırmızı bilye sayısını artırabilmek için komşu bilyeleri olabildiğince farklı renkte yapmamız gerekiyor. Bunu yapabilmek için her iki Y arasına, aynı zamanda başa ve sona en az birer kırmızı bilye koymamız gerekir. Bu durumda 10 tane renk değişimi olacak (KYKYKYKYKYK). Aynı renkte olan komşulukların sayısını da 10 yapmak için 10 kırmızı bilye daha eklemek gerekiyor. Şimdi 16 kırmızı bilyenin arasında 15 boşluk var ve bu boşluklara 5 tane yeşil bilye $\binom{15}{5}=3003$ farklı şekilde yerleştirilebilir. $3003 \equiv 3 \pmod{1000}$ olduğundan cevap 3 olur.

Cevap: D

9.



$|AB|<|AC|$ alalım. Verilere göre şekli çizip açıları yerleştirdiğimizde $|BM|=|MC|=|IM|$ olduğu görülür. $\overset{\Delta}{DBM} \sim \overset{\Delta}{BPM}$ (A.A) olduğundan $|MB|^2=|MD|.|MP|$ dir. Dolayısıyla $|MI|^2=|MD|.|MP|$ olacağından $\overset{\Delta}{DIM} \sim \overset{\Delta}{IPM}$ olduğu görülür. O zaman $m(\widehat{MPI})=m(\widehat{DIM})$ elde edilir. $ID \perp BC$ ve $OM \perp BC$ olduğundan $ID \parallel NM$ elde edilir. $\overset{\frown}{AN}$ nı $\widehat{APN}$ ve $\widehat{NMA}$ çevre açıları gördüğünden $m(\widehat{DIM})=m(\widehat{IMN})=m(\widehat{NMA})$ olur. Dolayısıyla $m(\widehat{APN})=m(\widehat{IPM})$ olur. Çapı gören $\widehat{NPM}$'sı 90° olur. Buradan $m(\widehat{API})=90^\circ$ bulunur.

Cevap: D

10.

) İfadeye $f(n)$ diyelim. $n^2-9n+21=1$ olursa $f(n)$ tamsayı olur. $n^2-9n+20=0 \Rightarrow (n-4)(n-5)=0$ olur. $n-5=x$ dersek

$$f(x+5)=\frac{9.(x+5).x^{2022}-(x+5)^2-7}{x(x+1)+1}=\frac{9(x+5)x^{2022}-x^2-10x-32}{x^2+x+1}$$

$$f(x+5)=\frac{9(x+5)(x^{2022}-1)-(x^2+x+1)+14}{x^2+x+1}$$ olur. Bilindiği üzere $2022\equiv 0 \pmod 3$ olduğundan $x^{2022}-1\equiv 0 \pmod{x^2+x+1}$ olur. Dolayısıyla $\frac{14}{x^2+x+1}$ tamsayı olursa $f(x+5)$ tamsayı olur. $x^2+x+1=x(x+1)+1$ den x^2+x+1 daima tek sayıdır. Dolayısıyla $x^2+x+1=1,-1,7,-7$ değerlerini alırsa $x=0,-1,-3,2$ ve $n=5,4,2,7$ değerlerini alır. Aranan toplam 18 olur. Cevap: B

11.

1) $S_m = \sum_{k=0}^{m} (2^k - k) = 2^{m+1} - 1 - \frac{m\cdot(m+1)}{2} < 2^{m+1}$ oldugu görülür

Buradan $S_0 = 2-1-0=1$, $S_1 = 4-1-1=2$ ve $S_2 = 8-1-3=4$ bulunur. Bu sonuçların hepsi 2'nin negatif olmayan tam sayı kuvvetleridir. $m \geq 3$ için $2^m < S_m$ olduğunu gösterirsek S_m, 2^m ile 2^{m+1} arasında sıkışacağından 2'nin kuvveti olarak yazılamaz.

$$2^m \overset{?}{<} 2^{m+1} - 1 - \frac{m(m+1)}{2} \Rightarrow 1 + \frac{m(m+1)}{2} \overset{?}{<} 2^m \Rightarrow$$

$$\binom{m+1}{0} + \binom{m+1}{2} \overset{?}{<} 2^m \Rightarrow 2\left[\binom{m+1}{0} + \binom{m+1}{2}\right] \overset{?}{<} 2^{m+1} \Rightarrow$$

$$2\left[\binom{m+1}{0} + \binom{m+1}{2}\right] \overset{?}{<} \binom{m+1}{0} + \binom{m+1}{1} + \dots + \binom{m+1}{m+1}$$ eşitsizliği $m \geq 3$ için daima sağlanır. Dolayısıyla istenen m değerleri 0, 1, 2 değerleri olup toplam 3 bulunur. cevap: B

12.

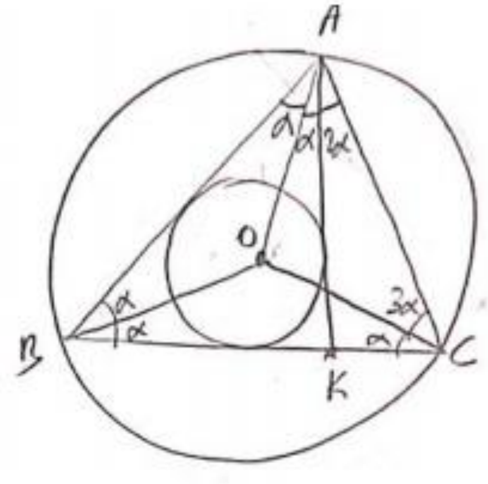
12) 11 aynı bilye 4 değişik kutuya, her kutuda en fazla 5 bilye bulunacak şekilde, kaç yolla dağıtılabilir?

A) 128 B) 288 C) 140 D) 308 E) 364

kutularda sırasıyla a, b, c ve d tane bilye bulunsun. $a+b+c+d=11$ denkleminin doğal sayılardaki çözüm sayısı $\binom{14}{3}=364$'tür. Kutulardan birine 6 bilyeyi önceden koyalım. Kalan bilyeler $a'+b+c+d=5$ denkleminin doğal sayılardaki çözüm sayısı olan $\binom{8}{3}=56$ farklı yolla dağıtılır. Fakat 6 bilyeyi başta koyabileceğimiz 4 kutu olduğundan istenmeyen durum sayısı $4\cdot 56=224$ olur. O zaman cevap $364-224=140$ bulunur.

Cevap: C

13.



O, $\overset{\triangle}{ABC}$'nin çevrel çemberinin
merkezi olduğundan $|OB|=|OA|=|OC|$ olur.
O, $\overset{\triangle}{ABK}$'nin iç merkezi olduğundan
$m(\widehat{OBA})=m(\widehat{OAB})=m(\widehat{OAK})=m(\widehat{OCB})=m(\widehat{OBC})=\alpha$
olur. Dolayısıyla tüm açılar yazıldığında
$10\alpha=180 \Rightarrow \alpha=18^\circ \Rightarrow 4\alpha=72^\circ$ bulunur.

Cevap: C

14.

Denklemi $7^x+2^y=3^z$ şeklinde düzenleyelim. $y=0$ için sağ taraf
tek tamsayılar iken sol taraf çift tam sayıları verir. Bu yüzden
$y>0$ dır. $y=1$, $y=2$ ve $y\geq 3$ durumlarını inceleyelim.
i) $y=1$ iken $7^x+2=3^z$ denkleminde $x=0$ iken $z=1$ ve $x=1$ iken $z=2$ dir.
$(0,1,1)$ ve $(1,1,2)$ çözümleri elde edildi.
$x>2$ için $7^x+2>3^3$ olduğundan 7^x in mod 27'de kalanları
sırasıyla $7,-5,-8,-2,13,10,-11,4,1$ olduğundan $x\equiv 4 \pmod 9$
olmalı ki $7^x+2\equiv 0 \pmod{27}$ olsun. $x=9k+4$ için
$7^{9k}\cdot 7^4+2=3^z$ denklemini inceleyelim. $7^9-1=(7^3-1)(7^6+7^3+1)$
$7^6+7^3+1=3\cdot 37\cdot 1063$ olduğunda
sayısını bölen bir çarpan arıyoruz. $7^9\equiv 1 \pmod{37}$ olduğundan
37 çarpanı dikkatimizi çekiyor.
$7^4+2\equiv 49^2+2\equiv 35 \pmod{37}$ bulunur. Şimdi 3^z'yi mod 37'de
inceleyelim. 3^z nin mod 37'de kalanları sırasıyla $3,9,27,7,$
$21,26,4,12,-1,-3,-9,10,30,16,11,-4,-12,1$ olduğundan
$3^z\not\equiv 35 \pmod{37}$ dir. Demek ki $x>2$ için çözüm yoktur.

ii) $y=2$ iken $7^x+4=3^z$ denklemini inceleyelim.

$7^x+4\equiv 1^x+4\equiv 2 \pmod 3$ olduğundan sağ taraf 3'e bölünürken sol taraf bölünmez. Dolayısıyla çözüm yoktur.

iii) $y\geq 3$ iken $7^x\equiv 3^z \pmod 8$ olacağından x ve z nin çift tamsayı olması gerekir. $x=2a$ ve $z=2b$ dersek. Başlangıç denkleminden $3^{2b}-7^{2a}=2^y \Rightarrow (3^b-7^a)(3^b+7^a)=2^y$ elde edilir.

Buradan $3^b-7^a=2^m$ ve $3^b+7^a=2^n$ denklemlerini inceleyelim $2.3^b=2^m+2^n$ denklemi ancak $m>0$ için $n>m\geq 1$ dir. Fakat $7^a+2=3^b$ nin çözümü (i)'de $m=1$ için sağlanabilir. yapılmıştı, $a=0, b=1$ için $x=0, z=2$ ve $a=1, b=2$ için $x=2, z=4$ değerlerini alır. Buradan $(0,3,2)$ ve $(2,5,4)$ bulunur.

Dolayısıyla toplamda 4 çözüm vardır. Cevap: D

15.

15) Denklemin kökleri $0\leq u\leq v\leq 1$

$u+v=\frac{-b}{a}$ ve $u.v=\frac{c}{a}$ olduğundan

$$\frac{(a-b)(2a-b)}{a(a-b+c)}=\frac{[a+a(u+v)][2a+a(u+v)]}{a[a+a(u+v)+au.v]}=\frac{(1+u+v)(2+u+v)}{1+u+v+u.v}=$$

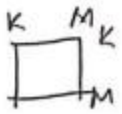
$$\frac{(1+u+v)(2+u+v)}{(u+1)(v+1)}=(1+u+v)\left(\frac{1}{u+1}+\frac{1}{v+1}\right)=1+\frac{v}{u+1}+1+\frac{u}{v+1}=2+\frac{v}{u+1}+\frac{u}{v+1}$$

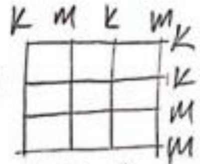
Buradan $2+\frac{v}{u+1}+\frac{u}{v+1}\leq 2+\frac{1}{u+1}+\frac{u}{u+1}=3$ bulunur.

$u=v=1$ için eşitlik sağlanır. ve en büyük değer 3 dür.

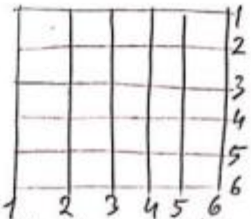
Cevap: C

16.

) 1) $n=1 \Rightarrow$ 

2) $n=2 \Rightarrow$ 

verilen iki durumda kenarları aynı renge boyanmış kare bulunamamaktadır.

3) $n=3 \Rightarrow$ 

durumunu çalıştığımızda kare elde edilemeyecek durum yakalayamıyoruz. Acaba gerçekten öyle mi? Satırlara ve sütunlara 1, 2, 3, 4, 5, 6 numaralarını verelim

Kırmızı sütunlar $a<b<c$, kırmızı satırlar $x<y<z$ olsun.

$A=\{b-a, c-b, c-a\}$ ve $B=\{y-x, z-y, z-x\}$ olsun.

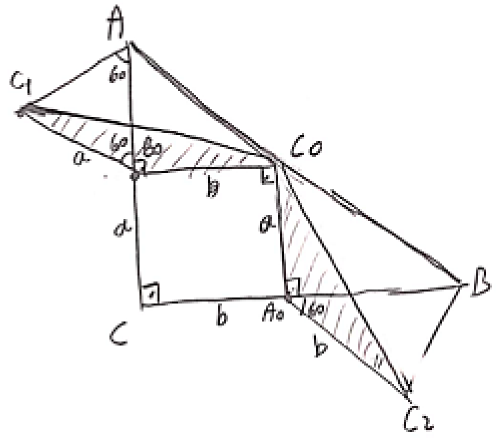
Eğer $A \cap B \neq \emptyset$ ise aranan kare muhakkak oluşacaktır.

$1 \notin (A \cap B)$ olsun. O zaman $1 \notin A$ olur. Bu durumda $A=\{2,4\}$ veya $A=\{2,3,5\}$ tir. Örneğin $x=1$ ve $\{y,z\} \cap \{3,5\} = \emptyset$ ise $\{y,z\} \subset \{2,4,6\}$ olur. Öyleyse $z-y \in A$ olur ki. Bu da bize $A \cap B \neq \emptyset$ olduğunu gösterir. Diğer durumlarda benzer şekilde örneklendirilebilir.

O zaman cevap 3 tür.

Cevap: B

17.



Verilenlere göre çizim yapıldığında $\overset{\Delta}{C_1B_0C_0} \cong \overset{\Delta}{C_0A_0C_2}$ (K.A.K) olduğu görülür. Dolayısıyla $|C_1C_0|=|C_2C_0|$ ve $m(C_0\hat{C_1}B_0)=m(A_0\hat{C_0}C_2)$ olur.

Buradan $m(C_1\hat{C_0}C_2)=90°+m(C_1\hat{C_0}B_0)+m(C_2\hat{C_0}A_0)$

$\Rightarrow m(C_1\hat{C_0}C_2)=120°$ bulunur.

Dolayısıyla $m(C_0\hat{C_1}C_2)=30°$ dir.

Cevap: D

18.

18) p ve q asalların birbirinden farklı olduğu durumları inceleyelim. $p \cdot q$ ve $p+q$ aralarında asal iki sayı olur. $p \cdot q$ çarpımı sadece p ve q asalına bölünebilir. Ayrıca $p+q$ toplamı da bu asallara bölünemez.

$(a^2+1, a+1) = (1-a, a+1) = (a+1, 2) = 1$ veya 2 olacağından

a çift tamsayı ise $p \cdot q = a^2+1$ ve $p+q = a+1$ olmalıdır. Bu durumda kökleri p ve q olan ikinci derece denklem $x^2 - (a+1)x + a^2+1 = 0$ olup. bu denklemin diskiriminantı

$a^2+2a+1-4a^2-4 = -3a^2+2a-3 = -2a^2-(a-1)^2-2 < 0$ olacağında denklem reel sayılarda çözümsüzdür. a tek tamsayı ise

$2pq = a^2+1$ ve $2(p+q) = a+1$ olmalıdır. Bu durumda kökleri p ve q olan ikinci derece denklem $2x^2-(a+1) \cdot x + a^2+1 = 0$ denkleminin diskiriminantı da negatif gelir. Bu yüzde farklı p ve q asalları yoktur. $p=q$ olacağından

$$\frac{p \cdot q}{p+q} = \frac{p^2}{2p} = \frac{p}{2} = \frac{a^2+1}{a+1} \Rightarrow p = 2a-2+\frac{4}{a+1}$$ olup $a=1$ veya $a=3$ tür.

Buradan $p=q=2$ ve $p=q=3$ ikilileri denklemi sağlar.

Cevap: C

19.

) Teorem: Her a ve b pozitif reel sayıları için

$(a^3+b^3)^2 \geq 2ab(a^4+b^4)$ (*) eşitsizliği geçerlidir.

ispat: $(*) \Leftrightarrow a^6-2a^5b+2a^3b^3-2ab^5+b^6 \geq 0 \Leftrightarrow$

$a^4(a^2-2ab+b^2)-a^4b^2+2a^3b^3+b^4(b^2-2ab+a^2)-a^2b^4 \Leftrightarrow$

$a^4(a-b)^2-a^2b^2(a^2-2ab+b^2)+b^4(a-b)^2 \Leftrightarrow (a-b)^2(a^4-a^2b^2+b^4) \geq 0$

olup teorem doğrudur.

Şimdi bu teoremi kullanarak;

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^8}{(x_i^4+x_{i+1}^4)\cdot x_{i+1}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^9}{(x_i^4+x_{i+1}^4)x_i x_{i+1}} \geq \sum_{i=1}^{n} \frac{2x_i^9}{(x_i^3+x_{i+1}^3)^2} =$$

$$2\sum_{i=1}^{n} \frac{(x_i^3)^3}{(x_i^3+x_{i+1}^3)^2} \geq \frac{2\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i^3)\right)^3}{4\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i^3)\right)^2} = \frac{1}{2}\cdot\sum_{i=1}^{n} x_i^3 \overset{K.O}{\geq} \frac{1}{2}n\sqrt[n]{x_1\cdots x_n} = \frac{n}{2}$$

bulunur. Örnek durum için $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 1$ alınabilir.

Cevap: A

20.

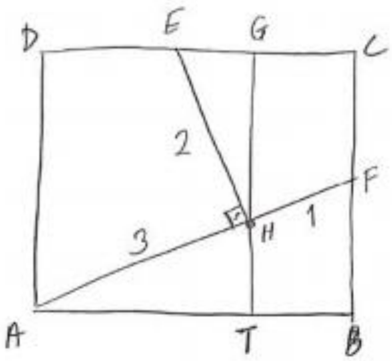
Çözüm. Adadaki yol sayısı N, her 98 kent arasındaki toplam yol sayısı K olsun. i. ve j. kentler arasında yol varsa $c_{ij}=1$, yoksa $c_{ij}=0$ olacak şekilde c_{ij} sayılarını tanımlayalım: $i,j=1,2,\dots,100$. i. kentten çıkan yol sayısını d_i ile gösterelim. $\sum_{i=1}^{100} d_i = 2N$ ve $\sum_{i,j=1}^{100} c_{ij} = N$ olacağı açıktır. İki kent alalım: i. ve j. Bunlardan en az birine bağlı yol sayısı

$d_i + d_j - c_{ij}$'dir. O halde geriye kalan 98 kenti bir biriyle bağlayan yol sayısı $K = N - d_i - d_j + c_{ij}$. Bu eşitliği her i,j ikilisi için yazıp taraf tarafa toplarsak

$\binom{100}{2} \cdot K = \binom{100}{2} N - 2 \cdot 99 N + N$, buradan

da $50 \cdot 99 \cdot K = 49 \cdot 97 N$ eşitliğini elde ederiz. $50 \cdot 99$ ile $49 \cdot 97$ aralarında asal olduğundan $50 \cdot 99 \mid N$. Öte yandan $N \leq \binom{100}{2} = 50 \cdot 99$, dolayısıyla $N = 50 \cdot 99 = 4950$

21.



H noktasından BC'ye paralel çizildiğinde DC kenarını G, AB kenarını T noktasında kessin. $\hat{AHT} \sim \hat{HEG}$ (A.A) olduğundan $|GH|=2n \Rightarrow |AT|=3n$ ve $\frac{|AH|}{|HF|}=\frac{|AT|}{|TB|}$ olduğundan $|TB|=n$ olur. $\hat{AHT} \sim \hat{AFB}$ (A.A) olduğundan $|HT|=3k \Rightarrow |FB|=4k$ olur. $|GT|=|AB|$ olduğundan $4n=2n+3k \Rightarrow 2n=3k \Rightarrow n=3a$ ve $k=2a$ olsun. $|BF|=8a$ ve $|AB|=12a$ olup pisagor teoremi gereğince $144a^2+64a^2=16$ olur. Buradan $a^2=\frac{16}{208}$ olup karenin alanı $144a^2=144\cdot\frac{16}{208}=\frac{144}{13}$ bulunur. Cevap: E

22.

22) $630=2.3^2.5.7$ olduğunda $\frac{(a+1).a}{2}\cdot\frac{(b+1)b}{2}=2.3^2.5.7$

$a(a+1).b(b+1)=2^3.3^2.5.7=1.2.35.36=2.3.20.21=3.4.14.15$

olduğundan (a,b) ikilileri (1,35),(35,1),(2,20),(20,2),(3,14),(14,3)

olup 6 tanedir. Cevap A

23.

23) $-1\le x,y\le 1$ aralığında $(1-x^2)$ ile $(1-y^2)$ negatif değerler alamaz.

Bu yüzden Aritmetik – Geometrik ortalama eşitsizliğinden

$2\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)} \le (1-x^2)+(1-y^2)$ dir. Acaba

$(1-x^2)+(1-y^2)\le 2(1-x)(1-y)+1$ midir?

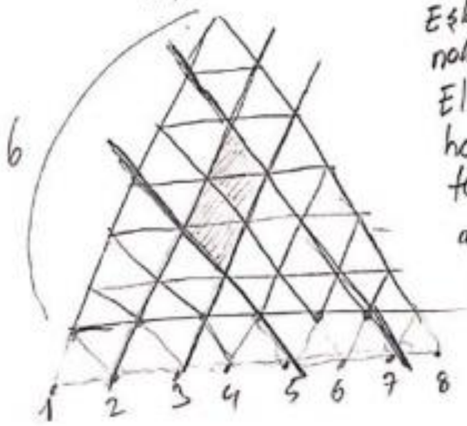
$2-(x^2+y^2)\le 2(1-x+xy-y)+1 \Rightarrow x^2+y^2 \geq 2x-2xy+2y-1$

$(x+y)^2-2(x+y)+1\geq 0 \Rightarrow (x+y-1)^2\geq 0$ olduğundan $x+y=1$

bulunur. Cevap: D

24.

A) 150 B) 174 C) 180



Eşkenar üçgeni bir kenarından uzatıp kesim noktalarını numaralandıralım. Elde edilen bu sekiz noktadan seçilen herhangi 4 nokta tam olarak 3 paralelkenar temsil eder. Örneğin 2, 3, 5, 7 noktalarını aldığımızda taralı bölgede bulunan 2 tanesi 1x1'lik, 1 tanesi 2x1 lik paralelkenar olmak üzere 3 paralelkenar elde edilir. O zaman $\binom{8}{4}\cdot 3 = 210$ bulunur.

Cevap: E

25.

Çözüm: PAQB deltoid olduğu için $m(\widehat{APB})=m(\widehat{AQB})$ olup çembersel olduğu için her biri $90°$ dir. P noktası [XY]'nin orta noktasıdır. Bunu ispatlamak gerekirse $\widehat{MPA} \sim \widehat{PBA} \sim \widehat{NBP}$ (AA) benzerlikleri gereği $|PM| = |PA|\cdot\frac{|PB|}{|AB|} = |PB|\cdot\frac{|PA|}{|AB|} = |PN|$ olduğu görülür. Pisagor teoremi gereği $r_A^2 + r_B^2 = 289$ dur. Aynı zamanda

$r_A \cdot r_B = |PM|\cdot|AB| = 17\cdot 5 = 85$ bulunur.

Buradan $(r_A + r_B)^2 = r_A^2 + 2r_A\cdot r_B + r_B^2 = 289 + 2\cdot 85 = 459 \Rightarrow$

$r_A + r_B = 3\sqrt{51}$ bulunur

Cevap: B

26.

26) $x \geq 3$ ve $y \geq 3 \Rightarrow 1 = \frac{1}{x} + \frac{2}{y} - \frac{4}{z} \leq \frac{1}{3} + \frac{2}{3} - \frac{4}{z} = 1 - \frac{4}{z}$ çelişkisinden $x \leq 2$ veya $y \leq 2$ olmalıdır.

i) $x=1$ için $\frac{2}{y} - \frac{4}{z} = 0 \Leftrightarrow z = 2y$ bulunur. Bu soruda engellenmişti.

ii) $x=2$ için $\frac{2}{y} - \frac{4}{z} = \frac{1}{2} \Rightarrow y = 4 - \frac{32}{z+8}$ elde edilir.

Buradan y pozitif tamsayı olduğu için $z=8$ veya 24 tür. Elde edilen çözüm üçlüleri $(2,2,8)$ ve $(2,3,24)$ olur. Ancak $(2,2,8)$ çözümü soruda engellenmişti.

iii) $y=1$ için $\frac{1}{x} + 2 - \frac{4}{z} = 1 \Rightarrow z = 4 - \frac{4}{x+1}$ elde edilir.

Buradan z pozitif tamsayı olduğu için $x=1$ veya 3 tür. Elde edilen çözüm üçlüleri $(1,1,2)$ ve $(3,1,3)$ olur. Ancak $(1,1,2)$ çözümü soruda engellenmiştir.

iv) $y=2$ için $\frac{1}{x} - \frac{4}{z} = 0 \Rightarrow z = 4x$ bulunur. Bu soruda engellenmişti.

Buna göre $(3,1,3)$ ve $(2,3,24)$ olmak üzere 2 farklı pozitif tamsayı üçlüsü denklemi sağlar. Cevap: D

27.

Cauchy-Schwarz eşitsizliği gereği $(3x+4y)^2 \leq (3^2+4^2)\cdot(x^2+y^2)$ olduğundan A nın en büyük değeri 25 bulunur. Eşitlik durumu $\frac{x}{3} = \frac{y}{4} = k$ için sağlanacağından $x \cdot y = 3k \cdot 4k = 240 \Rightarrow k = 2\sqrt{5}$ olacağından $\sqrt{A}(x+y) = 70\sqrt{5}$ elde edilir. $x+y = 7k = 7 \cdot 2\sqrt{5} = 14\sqrt{5}$ bulunur. Cevap: A

28.

$abcd + dcba = (a+d)10^3 + (b+c).10^2 + (b+c).10 + (a+d)$ ve $A+B$'nin bütün basamakları tek olduğundan $(a+d)$ ve $(b+c)$ için eldeli yada eldesiz durumları inceleyelim

eldeli yada eldesiz durumları inceleyelim $a>b>c>d>0$ olduğu için

1) $a+d \geq 10$ ve $b+c \geq 10$ olsun. $a>b>c>d>0$ olduğu için $b+c = 10+t$ ve $t=0,1,2,3,4,5$ dir.

$a+d = 10+k$ ve $k=0,1,2,3,4,5$ dir. $b+c=10+t$ ve $(10+t).10 + 10+k \Rightarrow$

olur. $A+B = (10+k).10^3 + (10+t)10^2 + (10+t).10 + 10+k$ sayısının rakamları

$A+B = 10^4 + (k+1)10^3 + (t+1)10^2 + (t+1).10 + k$

$1, k+1, t+1, k$'dır. k ve $k+1$'in ikisi de tek olamaz.

$a+d = 10+k$ ve $k=0,1,2,3,4,5$ tir.

2) $a+d \geq 10$ ve $b+c < 10$ olsun. $a+d = 10+k$ ve $k=0,1,2,3,4,5$ tir.

$A+B = (10+k).10^3 + (b+c).10^2 + (b+c).10 + (10+k) \Rightarrow$

$A+B = 10^4 + k.10^3 + (b+c)10^2 + (b+c+1).10 + k$ için $b+c=9$ ise

$A+B = 10^4 + k.10^3 + (b+c+1).10^2 + k$ olup onlar basamağı 0'dır.

$b+c<9$ ise $(b+c)$ ve $(b+c+1)$'in ikisi de tek olamaz

3) $a+d < 10$ ve $b+c \geq 10$ olsun. $b+c = 10+t$ ve $t=0,1,2,3,4,5$ tir.

$A+B = (a+d).10^3 + (10+t).10^2 + (10+t).10 + a+d \Rightarrow$

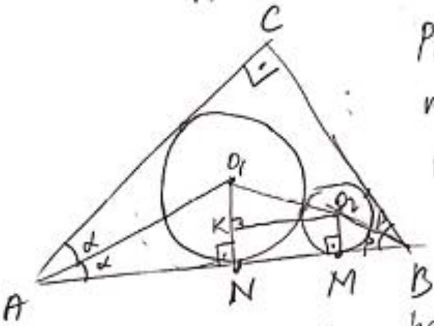
$A+B = (a+d+1).10^3 + (t+1).10^2 + 10.t + (a+d)$ olup t ve $(t+1)$'in ikisi de tek olamaz.

4) $a+d<10$ ve $b+c<10$ olsun. Bu durumda $a+d$ ve $b+c$ tek sayı olmalıdır. $a \geq 7$ ve $a>b>c>d>0$ olduğundan $a+d=9$ bulunur. Aynı şekilde $b+c = 5,7,9$ olabilir. Buna göre

$A = 8721, 8631, 8541, 8521, 8431, 8321, 7632, 7542$ ve 7432 sayıları bulunup toplam 9 tanedir.

Cevap: C

29.



Pisagor bağıntısı gereği $|AB|=5$ bulunur.

$m(\hat{A})=2\alpha \Rightarrow \tan 2\alpha = \frac{3}{4} = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha} \Rightarrow \tan\alpha = \frac{1}{3}$

$m(\hat{B})=2\beta \Rightarrow \tan 2\beta = \frac{4}{3} = \frac{2\tan\beta}{1-\tan^2\beta} \Rightarrow \tan\beta = \frac{1}{2}$ dir.

$|AN| = 3r_1$ ve $|MB| = 2r_2$ bulunur.

O_1O_2K üçgeninde pisagor bağıntısı gereği $(r_1+r_2)^2-(r_1-r_2)^2=|KO_2|^2=|MN|^2$

Buradan $|MN|=2\sqrt{r_1 \cdot r_2}$ bulunur. $|AB|=5=|AN|+|NM|+|MB|=3r_1+2\sqrt{r_1 r_2}+2r_2$

$4r_1=9r_2$ olduğundan $r_1=9r$ ve $r_2=4r$ denildiğinde

$3 \cdot 9r + 2\sqrt{9r \cdot 4r} + 2 \cdot 4r = 5 \Rightarrow 47r = 5 \Rightarrow r = \frac{5}{47}$ bulunur.

$13r = 13 \cdot \frac{5}{47} = \frac{65}{47}$ bulunur. Cevap: A

30.

Aradığımız asal sayı p olsun.

$2019^8 \equiv -1 \pmod p \Rightarrow 2019^{16} \equiv 1 \pmod p$

Euler teoremi gereği $\phi(p)=p-1=16k$ dır.

$k=1$ için $p=17 \Rightarrow 2019^8 \equiv 13^8 \equiv (-4)^8 \equiv 1 \pmod{17}$ sağlamadı

$k=6$ için $p=97 \Rightarrow 2019^8 \equiv (79)^8 \equiv (-18)^8 \equiv 96 \equiv -1 \pmod{97}$

sağladığından aranan en küçük asal çarpan 97 dir.

Cevap: E

31.

31) $x^2 \geq 0$ olduğundan $x \geq 0$ olmalıdır. $x=0$ sağlar. $x>0$ için çözüm arayalım. Tanım gereği $\lfloor y \rfloor \leq y$ olacağından

$x^2 \leq \frac{x}{2}\cdot\frac{x}{3}\cdot\frac{x}{4} \Rightarrow 24 \leq x$ bulunur. Ayrıca $\left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor \geq \frac{x}{2}-\frac{1}{2}$,

$\left\lfloor \frac{x}{3} \right\rfloor \geq \frac{x}{3}-\frac{2}{3}$ ve $\left\lfloor \frac{x}{4} \right\rfloor \geq \frac{x}{4}-\frac{3}{4}$ olacağından

$x^2 = \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor \cdot \left\lfloor \frac{x}{3} \right\rfloor \cdot \left\lfloor \frac{x}{4} \right\rfloor \geq \left(\frac{x}{2}-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{x}{3}-\frac{2}{3}\right)\left(\frac{x}{4}-\frac{3}{4}\right)$ bulunur. Buradan

$x^3-6x^2+11x-6 \leq 24x^2 \Rightarrow x^3-30x^2+11x-6 \leq 0$ bulunur.

$x>30$ iken bu eşitsizlik sağlanmaz çünkü $x^3>30x^2$ ve $11x>6$ olur. Buna göre $24 \leq x \leq 29$ için çözüm arayalım.

$x=24 \Rightarrow \left\lfloor \frac{24}{2} \right\rfloor \cdot \left\lfloor \frac{24}{3} \right\rfloor \cdot \left\lfloor \frac{24}{4} \right\rfloor = 12.8.6 = 24^2$ çözümdür

$x=25 \Rightarrow \left\lfloor \frac{25}{2} \right\rfloor \cdot \left\lfloor \frac{25}{3} \right\rfloor \cdot \left\lfloor \frac{25}{4} \right\rfloor = 12.8.6 \neq 25^2$ sağlamaz.

$x=26 \Rightarrow \left\lfloor \frac{26}{2} \right\rfloor \cdot \left\lfloor \frac{26}{3} \right\rfloor \cdot \left\lfloor \frac{26}{4} \right\rfloor = 13.8.6 \neq 26^2$ sağlamaz

$x=27 \Rightarrow \left\lfloor \frac{27}{2} \right\rfloor \cdot \left\lfloor \frac{27}{3} \right\rfloor \cdot \left\lfloor \frac{27}{4} \right\rfloor = 13.9.6 \neq 27^2$ sağlamaz

$x=28 \Rightarrow \left\lfloor \frac{28}{2} \right\rfloor \cdot \left\lfloor \frac{28}{3} \right\rfloor \cdot \left\lfloor \frac{28}{4} \right\rfloor = 14.9.7 \neq 28^2$ sağlamaz

$x=29 \Rightarrow \left\lfloor \frac{29}{2} \right\rfloor \cdot \left\lfloor \frac{29}{3} \right\rfloor \cdot \left\lfloor \frac{29}{4} \right\rfloor = 14.9.7 \neq 29^2$ sağlamaz

O zaman sadece $x=0$ ve $x=24$ değerleri çözümdür.

Cevap: A

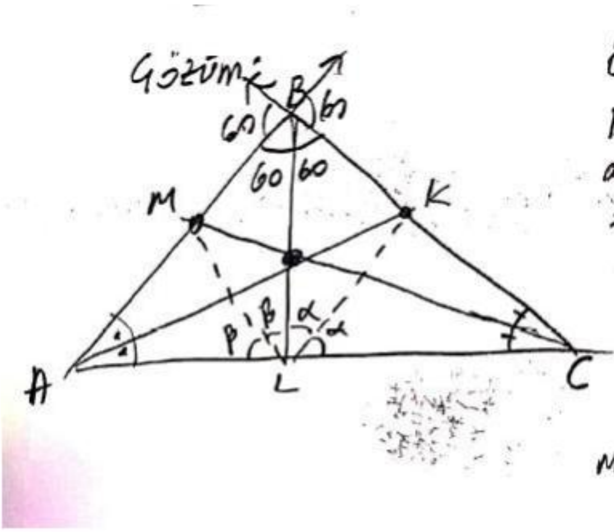
32.

Varsayalım ki doğrulardan k tanesini tutturmuş olsun. Dolayısıyla yanlışlardan da $(5-k)$ tanesini tutturmuş olmalı. O zaman yanlışlardan $4-(5-k)=k-1$ tanesini (D) olarak işaretlemeli. Toplamda $2k-1$ tanesini (D) olarak işaretledi. O zaman $2k-1 \geq 5$ olacağından $k \geq 3$ olmalı. O zaman Tuğbanur 'un en az 5 soruyu tutturmak için kullandığı yol sayısı $\binom{5}{k}.\binom{4}{k-1}$ kadardır. Böylece istenen olasılık

$\frac{\binom{5}{3}\binom{4}{2}+\binom{5}{4}\binom{4}{1}+\binom{5}{5}\binom{4}{0}}{\binom{9}{5}} = \frac{81}{126} = \frac{9}{14}$ olarak bulunur. Cevap: E

EMİNE DENEME ÇÖZÜMLER

1.



Öncelikle BC ve AB doğru parçaları B köşesinden uzatılarak 60° lik açılar elde edilir. M ve K noktaları sırasıyla BLC ve BAL üçgenlerinin dış teğet çemberlerinin merkezleri olur. Dolayısıyla LK ve LM açıortay olur.
Buradan $2\alpha+2\beta=180^\circ$
$m(K\hat{L}M)=\alpha+\beta=90^\circ$ bulunur.
Cevap: A

2.

Çözüm: $(a, a+1)=1$ olduğundan $(a^2, a+1)=1$ dir. Benzer şekilde
$(b, b-1)=1$ olduğundan $(b^2, b-1)=1$ dir. O zaman
$a+1=\mp b^2$ ve $b-1=\mp a^2$ olmalıdır. Her iki eşitlikte
önce artıları alalım. İlk eşitliğimiz $a=b^2-1=(b-1)(b+1)$
ikinci eşitliğimiz $b-1=a^2$ olsun. Buradan $a=a^2\cdot(a^2+2)$
elde edilir. $a=0$ ise $b=1$ elde edilir. $\boxed{(0,1)}$
$a\neq 0$ ise $1=a\cdot(a^2+2)$ elde edilir. Fakat $a^2+1>1$ olduğu
için bu eşitliğin tam sayılarda çözümü yoktur.
Şimdi başlangıçta elde ettiğimiz her iki denklemde eksileri
alalım. $a+1=-b^2$ ve $b-1=-a^2$ olsun, $b=1-a^2=(1-a)(1+a)$
denklemi elde edilir. Burada da $b=(b^2+2)\cdot(-b^2)$ elde edilir.
$b=0$ ise $a=-1$ elde edilir. $\boxed{(-1,0)}$
$b\neq 0$ ise $1=(b^2+2)\cdot(-b)$ elde edilir. Fakat $b^2+1>1$ olduğundan
bu eşitliğin tam sayılarda çözümü yoktur.
Cevap: 2

3.

A) 0 B) 2

Çözüm: Verilen denklemi $a+b+c+d$ toplamı ile çarpalım.

$$\frac{a(a+b+c+d)}{b+c+d}+\frac{b\cdot(a+b+c+d)}{a+c+d}+\frac{c(a+b+c+d)}{a+b+d}+\frac{d(a+b+c+d)}{a+b+c}=a+b+c+d$$

$$\frac{a^2+a(b+c+d)}{b+c+d}+\frac{b^2+b(a+c+d)}{a+c+d}+\frac{c^2+c(a+b+d)}{a+b+d}+\frac{d^2+d(a+b+c)}{a+b+c}=a+b+c+d$$

$$\frac{a^2}{b+c+d}+a+\frac{b^2}{a+c+d}+b+\frac{c^2}{a+b+d}+c+\frac{d^2}{a+b+c}+d=a+b+c+d$$ elde edilir

Buradan $\frac{a^2}{b+c+d}+\frac{b^2}{a+c+d}+\frac{c^2}{a+b+d}+\frac{d^2}{a+b+c}=0$ bulunur.

Cevap: A

4.

Çözüm: $a\leq 7$ olmalıdır. $a=8$ olursa $c_{min}=64$ olur.

$a=1$ için $b=c$ olur. Buradan $\boxed{60}$ durum elde edilir

$a=2$ için $2b=c$ olur. Buradan $\boxed{29}$ " " "

$a=3$ için $3b=c$ olur. " $\boxed{18}$ " " "

$a=4$ için $4b=c$ olur. " $\boxed{12}$ " " "

$a=5$ için $5b=c$ olur. " $\boxed{8}$ " " "

$a=6$ için $6b=c$ olur. " $\boxed{5}$ " " "

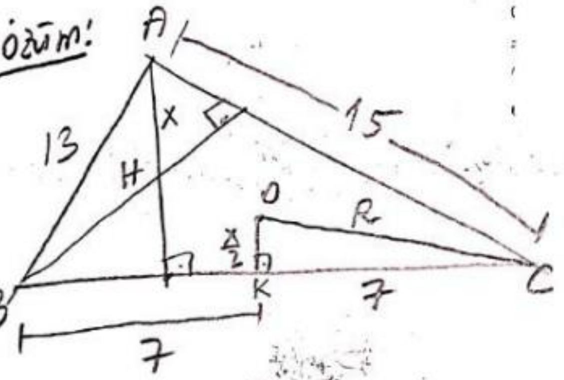
$a=7$ için $7b=c$ olur. " $\boxed{2}$ " " "

Toplamda 134 farklı (a,b,c) tam sayı üçlüsü vardır.

Cevap: B

5.

Çözüm:



$u = \frac{13+14+15}{2} = 21$

Heron formülünden

$A(ABC) = \sqrt{21\cdot 6\cdot 7\cdot 8} = 84$

$A(ABC) = \frac{a\cdot b\cdot c}{4R} = \frac{13\cdot 14\cdot 15}{4R} = 84$

$R = \frac{65}{8}$ bulunur.

$\overset{\Delta}{OKC}$'de pisagor uygulayalım.

$\left(\frac{x}{2}\right)^2 = R^2 - 49 \Rightarrow \frac{x}{2} = \sqrt{\left(\frac{65}{8}-7\right)\left(\frac{65}{8}+7\right)}$ elde edilir.

Herhangi bir üçgende, çevrel çember merkezinin bir kenara uzaklığı, o kenarı gören köşenin diklik merkezine uzaklığının yarısıdır.

Buna göre $|AH| = x = \frac{33}{4}$ bulunur. Cevap: D

6.

A) 0 B) 6

Çözüm: $d = \frac{a\cdot b}{c}$ pozitif tam sayı olduğuna göre, öyle m, n, x ve y pozitif tam sayıları seçebiliriz ki $b = n\cdot y$ ve $c = m\cdot n$ olsun. Buna göre,

$a = m\cdot x$, $b = n\cdot y$ ve $c = m\cdot n$

$$a+b+c+d = m\cdot x + n\cdot y + m\cdot n + x\cdot y$$
$$= m(x+n) + y(x+n)$$
$$= (m+y)\cdot(x+n)$$

çarpımında her bir çarpan en az 2 olacağından $a+b+c+d$ toplamının asal olması mümkün değildir. Cevap: A

7.

: Paraboller teğet oldukları için tek noktada kesişeceklerinden ortak çözümlerin diskriminantı sıfır olmalıdır.

$x^2+2013x+\alpha=-x^2+\alpha x+2013 \Rightarrow 2x^2-(\alpha-2013)x+\alpha-2013=0$

$\Delta=(\alpha-2013)^2-4\cdot 2\cdot(\alpha-2013)=0$

$(\alpha-2013)(\alpha-2021)=0$

Buradan α nın alabileceği değerler toplamı 4034 bulunur. Cevap: C

8.

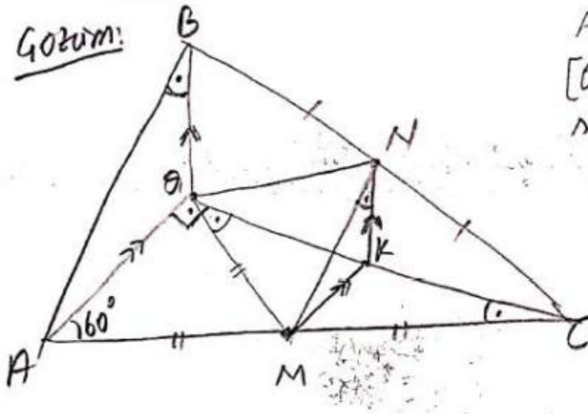
A) 9

: İlk 12 sayı 10001, 10101, 10201, ..., 10901, 11011 ve 11111 dir.
Buna göre, 12. sayının rakamları toplamı 5 dir. Cevap E

9.

A) 90

Çözüm:



$A\hat{\Theta}C$, çapı gördüğü için $90°$ dir.
$[\Theta C]$ nın orta noktasına K diyelim
$MN \parallel AB$, $NK \parallel \Theta B$ olduğundan
$m(A\hat{B}\Theta)=m(M\hat{N}K)$ bulunur.
Dik üçgen özelliğinden $m(M\hat{\Theta}C)=m(\Theta\hat{C}M)$ olacağından $m(M\hat{\Theta}C)=m(M\hat{N}K)$ bulunur. Dolayısıyla ΘMKN kirişler dörtgenidir.
$A\Theta \parallel MK$ olduğundan ve kirişler dörtgeninden $m(\Theta\hat{K}M)=m(\Theta\hat{N}M)=90°$ bulunur. Cevap: A

10.

2'den büyük iki asal sayının toplamı asal sayı olamaz.
$p+q$ nun asal olması için $p-q$ da asal olduğundan
$p>q$ olur ve $q=2$ bulunur. Buna göre,
$p-2$, p, $p+2$ ardışık üç tek sayı olduğundan ve asal
sayı olduklarından $p-2=3$ olur. Dolayısıyla tek çözüm
$p=5$; $q=2$ dir. Cevap: B

11.

Çözüm: $-1 \le a \le 1$ olacağından $a=\sin x$ yazılabilir.

$\sqrt{1+3\sin^3 x}+\sqrt{1-(1-\sin^2 x)^2}=3$ ve $1-\sin^2 x=\cos^2 x$

olduğundan $\sqrt{1+3\sin^3 x}+\sqrt{1-\cos^4 x}=3$ denklemini çözelim.

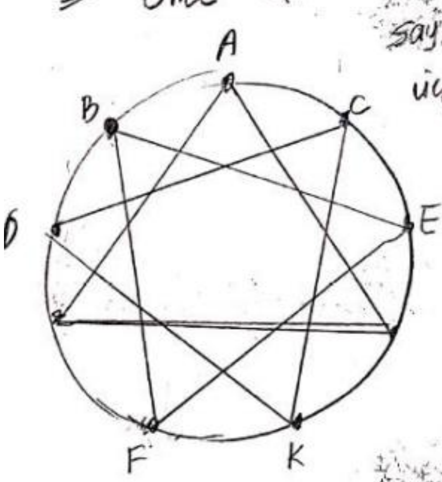
$\sqrt{1+3\sin^3 x}+\sqrt{1-\cos^4 x} \le \sqrt{1+3}+\sqrt{1}=3$ bulunur.

Dolayısıyla $a=\sin x=1$ olmalı. Tek çözüm var.

Cevap: B

12.

Çözüm: Önce eşkenar üçgenleri sayalım. Eşkenar üçgenlerin sayısı 3 tür. Şimdi eşkenar olmayan ikizkenar üçgenleri sayalım. Tepe noktası A olan üçgenleri sayalım.

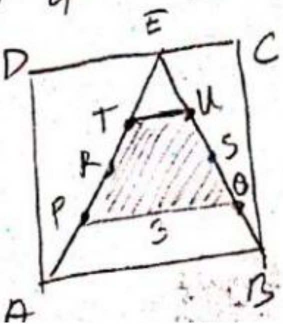


ABC, ADE, AFK üçgenleri vardır.
Her köşe için o köşeyi tepe noktası kabul eden 3 tane ikizkenar üçgen çizilebilir.
Toplamda bu ikizkenar üçgenlerin sayısı
$9.3=27$ tanedir.
Buna göre çeşitkenar olmayan üçgenlerin sayısı $27+3=30$ bulunur.

Cevap: B

13.

Çözüm:



Temel benzerlik teoreminden $|TU|=1$, $|AB|=4$ ve TU ve FQ paralelleri arasındaki uzaklık 2 bulunur.

Buna göre $Alan(PQUT)=\dfrac{(3+1)\cdot 2}{2}=4$ tür

Cevap: B

14.

- $x=0$ ise $1=21^y$ den $y=0$ bulunur. $\boxed{(0,0)}$
- $x^4+x^2+1=21^y$ ise $4x^4+4x^2+4=4\cdot 21^y$

$$(2x^2+1)^2=4\cdot 21^y-3$$

Bu denklemde $y<0$ ise sol taraf tamsayı fakat sağ taraf tamsayı olmadığından çözüm gelmez.

$y=1$ ise $(2x^2+1)^2=81$

$$2x^2+1=9$$

$x=\mp 2$ bulunur. $\boxed{(2,1) \text{ ve } (-2,1)}$

$y>1$ ise $(2x^2+1)^2\equiv 6 \pmod 9$ ve mod 9'da kare kalanlar 0, 1, 4 ve 7 olduğundan çözüm gelmez.

Cevap: D

15.

Çözüm: I. yol Denklemde $x=-y$ yazalım. $f(-y+f(y))=f(0)+1$ elde edilir. Fonksiyon artan olduğuna göre,

$f(y)-y=c$ (c: sabit) olmalıdır. Buradan $f(y)=y+c$ bulunur. Bulduğumuzu orijinal denklemde yerine yazıp c'yi bulalım:

$f(x+f(y))=x+f(y)+c=x+y+c+c$ ve $f(x+y)+1=x+y+c+1$ bulunup $c=1$ elde edilir. Demek ki $f(x)=x+1$ olur.

$f(2021)=2022$ bulunur. Cevap: E

II. yol: Pratik olarak $x=0$ verilirse $f(f(y))=f(y)+1$ $f(y)=2021$ kabul edilirse $f(2021)=2021+1=2022$ yazılabilir.

16.

256

Çarpımları 4'ün katı olmayan durumları hesaplayalım.

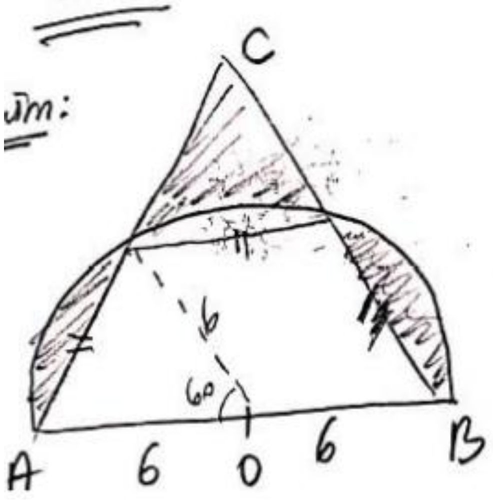
Sadece 1 veya 3 içeren: $2^4=16$ durum var. Bir tane 2 ve "1 veya 3" içeren $4\cdot 2^3=32$ durum var.

İstenen olasılık değeri $1-\frac{48}{4^4}=\frac{13}{16}$ bulunur.

Cevap: E

17.

A) 6π



Taralı bölgenin alanı istenmektedir. Taralı alanlar 60°lik daire dilimine taşınabilmektedir. Buna göre, taralı alan

$\frac{\pi\cdot 6^2}{6}=6\pi$ bulunur.

Cevap: A

18.

Çözüm S_n'in 15 ile bölünebilmesi için birler basamağı 0 veya 5 olmalıdır. n'nin en küçük değeri 5 olabilir.

$S_5=1+11+111+1111+11111=12345$ sayısı aynı zamanda 3 ile bölünebildiğinden n'nin en küçük değeri 5'tir

Cevap: B

19.

A) 0 ...

Çözüm: $a+b+c=k$ olsun. Kökleri a, b ve c olan denklem

vieta formüllerinden $x^3-kx^2-x-5=0$ olarak yazılır.

Buradan $k = x-\frac{1}{x}-\frac{5}{x^2}$ elde edilir. $k'=1+\frac{1}{x^2}+\frac{10}{x^3}=0$ olup

$x^3+x+10=(x+2)\cdot(x^2-2x+5)=0$ denkleminin reel kökü

sadece -2 dir. $x=-2$ için k en büyük değeri alacağından

$k_{max}=-2+\frac{1}{2}-\frac{5}{4}=\frac{-11}{4}$ olup $k\leq\frac{-11}{4}$ tür. k'nın en büyük

tam sayı değeri -3 elde edilir. $k=-3$ yazılıp $f(x)=x^3+3x^2-x-5$

fonksiyonu incelendiğinde $f(-3)<0$, $f(-2)>0$, $f(-1)<0$ ve $f(2)>0$

olduğundan fonksiyon x-eksenini 3 farklı noktada keser.

a, b ve c reel sayıların varlığı $k=-3$ için mümkündür.

Cevap: D

20.

Çözüm: $(n+1)! = (n+1).n!$ olduğuna göre,

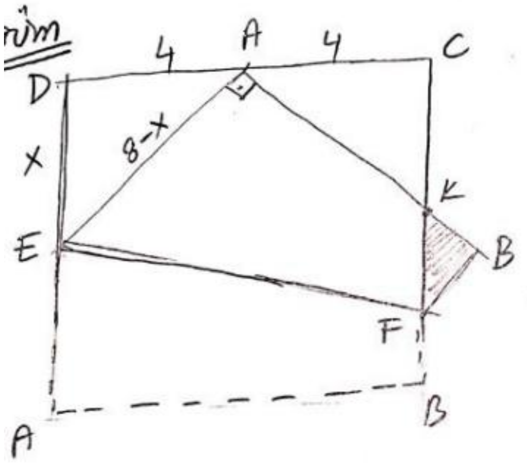
$A=(11.9!).(10.8!).(9.7!).\ldots.(4.2!).(3.1!)$ elde edilir

$B=(9.9!).(8.8!).(7.7!).\ldots.(2.2!).(1.1!)$

$$\frac{A}{B}=\frac{11.10.9.8.7.6.5.4.3}{9.8.7.6.5.4.3.2.1}=\frac{11.10}{2.1}=55 \text{ bulunur.}$$

Cevap: E

21.



$|DE|=x$ dersek $|AE|=8-x$ dur.
Pisagor'dan $x=3$ bulunur.
$\overset{\triangle}{EDA} \sim \overset{\triangle}{ACK}$ olduğundan $|AK|=\frac{20}{3}$
ve $|CK|=\frac{16}{3}$ bulunur.
$|BK|=8-|AK|$ olduğundan
$|BK|=\frac{4}{3}$ elde edilir.
$\overset{\triangle}{ACK} \sim \overset{\triangle}{FBK}$ olduğunda $|BF|=1$
bulunur. $Alan(FKB)=1\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{2}{3}$
elde edilir Cevap: A

22.

A) 324

$N=(10-1)+(10^2-1)+(10^3-1)+\cdots+(10^{321}-1)$
$N=10+10^2+10^3+\cdots+10^{321}-321$
$N=\underbrace{111\ldots10}_{322 \text{ basamak}}-321 \Rightarrow N=111\ldots10000+1110-321$
$N=111\ldots10000+789$
$N=111\ldots10789$
$S(N)=318+7+8+9=342$
cevap: C

23.

A) 0

Çözüm: $n=m=0$ koyalım. $f(0)=0$. bulunur. Şimdi sadece
$m=0$ koyalım $2.f(n)=f(4n)$ bulunur. Sonra orijinal
denklemde $m=n$ koyalım. $f(2n)=f(4n)$ bulunur. Bulunan
bu iki denklemden $f(4n)=f(8n)=2.f(2n)=2.f(4n)$ elde
edilir ki bu da $f(4n)=0$ demektir. O zaman
$f(n)=0$ bütün negatif olmayan tam sayılar için
sağlandığına göre $f(5)=0$ bulunur.

Cevap: A

24.

22 B) 132

indirgeme bağıntısı elde edelim. Burada n oyuncu değiştirme sayısı olsun.

$a_n = 11.(12-n).a_{n-1}$ ve $a_0 = 1$ dir.

$a_1 = 11.11.1 = 121$

$a_2 = 11.10.121 \equiv 310 \pmod{1000}$

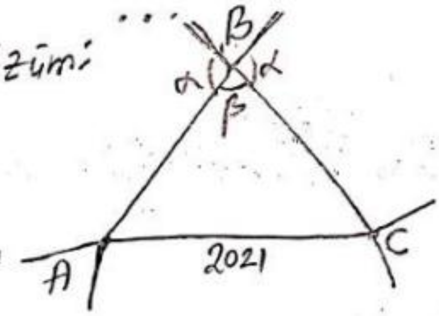
$a_3 = 11.9.11.10.121 \equiv 99.310 \equiv 690 \pmod{1000}$

$a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 1 + 121 + 310 + 690 \equiv 122 \pmod{1000}$

Cevap: A

25.

Çözüm:



$2\alpha + \beta_{max} < 360$

$2.\frac{(n-2).180}{n} + 60.1 < 360$

$360\frac{(n-2)}{n} < 300$

$6(n-2) < 5n$

$n < 12 \Rightarrow n_{max} = 11$

bulunur.

cevap: C

26.

Çözüm: Öncelikle m^2+m+1 tek sayı olduğu için n tek sayı olmalıdır. Şimdi denklemi (mod 3)'te inceleyelim.

$m \equiv 0$ ise $n^3 \equiv 1 \pmod 3$ olduğundan $n \equiv 1 \pmod 3$

$m \equiv 1$ ise $n^3 \equiv 0 \pmod 3$ 〃 $n \equiv 0 \pmod 3$

$m \equiv 2$ ise $n^3 \equiv 1 \pmod 3$ 〃 $n \equiv 1 \pmod 3$

Şimdi bulduğumuz sonuçları değerlendirelim

$m \equiv 3k+1$ ise $n^3 = 9k^2+6k+1+3k+1+1 = 9k^2+9k+3$ dur. Fakat gelişki: $n^3 \not\equiv 9k^2+9k+3 \pmod 9$ olduğundan gelişki elde edilir. $3 \nmid n$ bulunur.

n 2 ile bölündüğünde 1 kalanını vermektedir.

O zaman n, 3 ve 2 ile bölündüğünde 1 kalanını vermektedir.

Buna göre $n \equiv 1 \pmod 6$ dır. Cevap: E

Örneğin $n=7$ için $m=18$ olmaktadır.

27.

Denklemin karesini alalım.

$x+y-2\sqrt{xy} = 2xy+\frac{1}{2}$ ise $x+y = 2\left(\sqrt{xy}+\frac{1}{2}\right)^2$

$$\sqrt{x+y} = \sqrt{2}\left(\sqrt{xy}+\frac{1}{2}\right)$$

$$\sqrt{x+y} = \sqrt{2xy}+\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sqrt{x+y}-\sqrt{2xy} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$ bulunur

Cevap: B

28.

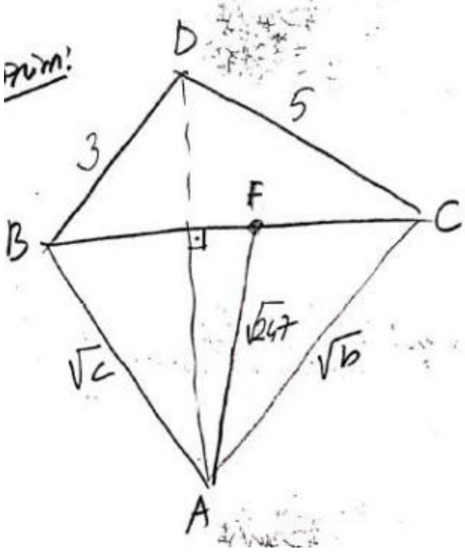
Çözüm: Ancak (1,1)'e ulaştıktan sonra orijine ulaşılabilir.
$K:(a-1,b-1)$, $S=(a-1,b)$ ve $A:(a,b-1)$ ile hareketleri tanımlarsak KKK + KKSA + KSASA + SASASA

$$\frac{1}{3^4} + \frac{\frac{4!}{2!}}{3^5} + \frac{\frac{5!}{2!2!}}{3^6} + \frac{\frac{6!}{3!3!}}{3^7} = \frac{245}{3^7}$$

$m=245$ ve $n=7$ bulunur
$m+n=252$ Cevap: A

29.

Çözüm:



Köşegenler dik kesiştiğinden,
$3^2+b=c+5^2 \Rightarrow b=c+16$ bulunur.
Kenarortay teoreminden,
$2\cdot 247=b+c-18 \Rightarrow b+c=512$ bulunur.
Buradan $b=264$ ve $c=248$ dir.
$2c+3b=1288$ bulunur.

Cevap: C

30.

Çözüm: Denklemi (mod 11)'de inceleyelim. $x^5+4^y\equiv 0 \pmod{11}$
$x^5\equiv\mp 1 \pmod{11}$ olduğundan $4^y\equiv -1 \pmod{11}$ veya $4^y\equiv 1 \pmod{11}$ olmalıdır. Fakat $4^y\not\equiv -1 \pmod{11}$ olduğundan $4^y\equiv 1 \pmod{11}$ koşulunu sağlayan en küçük pozitif tam sayı $y=5$ tir.
Örnek durum $x=6$, $y=5$ ve $z=1$ için denklem sağlanır.

Cevap: E

31.

Çözüm:

$$x+y+z = \lfloor x+y+z \rfloor + \frac{1}{4}$$
$$y+z+t = \lfloor y+z+t \rfloor + \frac{1}{4}$$
$$x+z+t = \lfloor x+z+t \rfloor + \frac{1}{4}$$
$$x+y+t = \lfloor x+y+t \rfloor + \frac{1}{4}$$
$$+ \overline{\qquad\qquad\qquad\qquad}$$
$$3(x+y+z+t) = \text{Tamsayı} + 1$$

O zaman $x+y+z+t$ toplamı 3 ile çarpıldığında tamsayı olduğuna göre, $\{x, y, z, t\} = 0, \frac{1}{3}$ veya $\frac{2}{3}$ olur.

Cevap: D

32.

Tüm durum $= 20 \cdot 19 = 380$

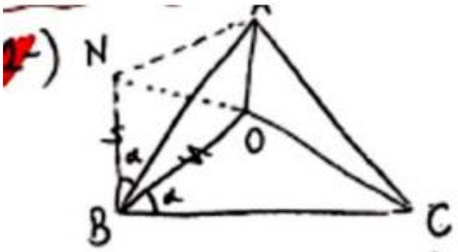
İstenen durumu hesaplarken seçilmeyen 18 sayıyı küçükten büyüğe sıraladığımızda 19 boşluk oluşur. Seçtiğimiz iki sayıyı oluşan bu boşluklarda 2 si temsil eder $\binom{19}{2} = 171$

İstenen olasılık değeri $\frac{171}{380} = \frac{9}{20}$ bulunur.

Cevap: C

YILMAZ DENEME ÇÖZÜMLER

1.



$\frac{|AO|}{a} = \frac{|BO|}{b} = \frac{|CO|}{c} = k$ olsun.

BOC üçgenine eş BNA üçgenini çizelim. $m(O\hat{B}C) = m(N\hat{B}A)$ olduğu için

~~Bu durumda~~ $m(N\hat{B}O) = 60°$ olur. $|NB| = |OB|$ olduğundan

NBO üçgeni eşkenar ~~dır~~ üçgendir.

$|AN| = |OC|$ olduğundan $|AN|^2 = (ck)^2 = c^2k^2 = a^2k^2 + b^2k^2 = (ak)^2 + (bk)^2$

$= |AO|^2 + |ON|^2$.

$\Rightarrow m(A\hat{O}N) = 90° \Rightarrow m(AOB) = \underbrace{90 + 60}_{m(A\hat{O}N) + m(N\hat{O}B) =} = 150°$ ~~olur~~ bulunur.

2.

İlk küme A_1, elemanları çarpımı P_1; ikinci küme A_2, elemanları çarpımı P_2 olsun. ~~[illegible]~~ $7 \in A_1$ olursa P_1, P_2 ile bölünmez. Verilen şart gereği $7 \in A_1 \Rightarrow P_1/P_2 \geq 7$. olur. A_1 ve A_2 kümelerini aşağıdaki gibi seçersek

$A_1 = \{3, 5, 6, 7, 8\}$, $A_2 = \{1, 2, 4, 9, 10\} \Rightarrow P_1/P_2 = 7$. bulunur.

3.

Denklemin diskriminantı D ise

$D = 4(n^2+1)^2 + 8n(n^2+1) = 4(n+1)^2(n^2+1) > 0$

$n \geq 1 \Rightarrow$ Denklemin iki reel kökü vardır.

Köklerin rasyonel olması için $\sqrt{D}$ rasyonel sayı olmalıdır.

$\sqrt{n^2+1}$ rasyonel sayı ~~ise tam sayıdır~~ olması için $t > 0$ olmak üzere $n^2+1 = t^2$ ~~$t > 0$ dersek~~ olmalıdır. Denklem düzenlenirse

$(t+n)(t-n) = 1 \Rightarrow$ ve $n = 0$. ~~Çelişki~~ olur. Bu da çelişkidir. $n \geq 1$ için denklemin rasyonel sayılarda çözümü yoktur.

4.

Çarpımın negatif olması için sayıların biri negatif biri pozitif seçilmelidir

n tanesi negatifse 13-n tanesi pozitiftir

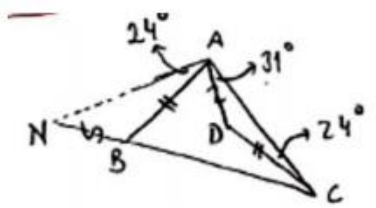
Ayrıca $13-n \geq 3$
$n \leq 10$ olmalıdır.

$\binom{13-n}{1} \cdot \binom{n}{1} = 22$

$(13-n) \cdot n = 22$
$n=2$ ve $n=11$ bulunur.

$n=2$ verilen şartı sağlar.

5.



$N \in BC$ olacak şekilde $m(B\hat{A}N)=24°$ lik açı çizersek, $m(A\hat{B}N)=m(A\hat{D}C)$ olduğundan,

ABN üçgeni ile CDA üçgeni eş üçgendir. Buradan $|AN|$=$|AC|$ ve $m(\widehat{ANB}) = m(\widehat{ACB}) = 31^o$ olur.

$m(D\hat{A}B) = 180 - 3.31 - 24 = 63°$. bulunur.

6.

Denklem düzenlenerek çarpanlarına ayrılırsa

$5m + 3n = mn \Rightarrow (m-3)(n-5) = 15$ elde edilir.

$15 = 1.15 = 3.5$

$\Rightarrow (m-3, n-3) = \{(-1,-15), (-3,-5), (-5,-3), (-15,-1), (1,15),$
$(3,5), (5,3), (15,1)\}$ Bu ikilikler de kontrol edilirse

Çözümler $(4,20), (6,10), (8,8)$ ve $(18,6)$ olmak üzere

4 tanedir bulunur.

7.

$$\frac{k+2}{k!+(k+1)!+(k+2)!}=\frac{k+2}{k!\left[1+(k+1)(k+3)\right]}=\frac{k+2}{k!\,(k+2)^2}$$

$$=\frac{1}{k!\,(k+1)}=\frac{k+1}{(k+2)!}=\frac{k+2-1}{(k+2)!}$$

$$=\frac{1}{(k+1)!}-\frac{1}{(k+2)!}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{2008}\frac{k+2}{k!+(k+1)!+(k+2)!}=\sum_{k=1}^{2008}\left(\frac{1}{(k+1)!}-\frac{1}{(k+2)!}\right)$$

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}\\
&+\frac{1}{3!}-\frac{1}{4!}\\
&\quad\vdots\\
&+\frac{1}{2011!}-\frac{1}{2012!}
\end{aligned}$$

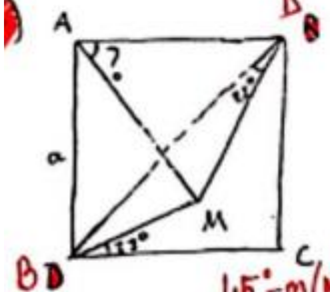
$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{2012!}$$

$$=\frac{1006.2011!-1}{2012!}$$

8.

22-) Sorunun gün seçiminden bağımsız olduğu açıktır.
Ali'nin Pazartesi günü yalan söylediğini varsayalım.
Bu durumda Pazar günü istenileni söyleyebilir, söylediği doğrudur;
Pazartesi istenileni söyler, söylediği yalandır;
Salı günü istenileni söyler, söylediği doğrudur.
Diğer günler için doğruyu söylemek zorundadır, bir gün önce yalan söylememiştir ve bir gün sonra yalan söylemeyecektir.
Cevap 3'tür.

9.



ABMD dörtgeninde

$|AD|=|AB|$ ve $m(\widehat{BAD})+2m(\widehat{BMD})=360°$ olduğundan

A merkezli ve B, M, D noktalarından geçen

çember çizilebilir.

$45° - m(\widehat{MBC}) = 22°$ $\quad$ $180° - (22° + 23°) = 135°$

$m(\widehat{MBD}) = 22° \Rightarrow m(\widehat{BMD}) = 135°$

~~M noktası yarıçapı a, merkezi A olan çember üzerindedir.~~

$m(\widehat{MAD}) = m(\overset{\frown}{MD}) = 2.m(\widehat{MBD}) = 44°$. bulunur.

10.

İki basamaklı tamkareler 16, 25, 36, 49, 64, 81.

Her sayıyla başlayan en fazla bir tamkare var. İlk basamağın seçiminden sonra her basamak tek şekilde belirlenir. 5, 7 ve 9'la başlayan tamkare yok.

a) 16 ile başlarsa, 16, 164, 1649

b) 25 ile başlarsa, 25

c) 36 ile başlarsa, 36, 364, 3649

d) 49 ile başlarsa, 49

e) 64 ile başlarsa, 64, 649

d) 81 ile başlarsa, 81, 816, 8164, 81649

Verilen şartları sağlayan 14 tamsayı vardır.

11.

7) Verilen denklemler ~~den~~ düzenlenirse

$$(x_1-1)+(x_2-1)+\ldots+(x_{2010}-1)=0 \quad (1)$$

$$x_1^3(x_1-1)+x_2^3(x_2-1)+\ldots+x_{2010}^3(x_{2010}-1)=0 \quad (2)$$

elde ~~edersin~~ edilir.

(2)−(1)'den

$$(x_1^3-1)(x_1-1)+(x_2^3-1)(x_2-1)+\ldots+(x_{2010}^3-1)(x_{2010}-1)=0$$

$$(x_1-1)^2(x_1^2+x_1+1)+(x_2-1)^2(x_2^2-x_2+1)+\ldots+(x_{2010}-1)^2(x_{2010}^2+x_{2010}+1)=0.$$

$$x_i^2+x_i+1=\left(x_i+\tfrac{1}{2}\right)^2+\tfrac{3}{4}>0,\ \forall x_i\in\mathbb{R}.$$

$$(x_i-1)^2\geqslant 0$$

Denklemin sağlanması için $x_1=x_2=\ldots=x_{2010}=1$ olmalıdır.

12.

Sayılar $a_1, a_2, \ldots a_n$ ve bunların 10 ile bölümünden
kalanlarda $b_1, b_2, \ldots b_n$ olsun. b_i'lerden herhangi ikisi $\{1,9\},\{2,8\},\{3,7\}$ ve
$\{4,6\}$ kümelerinden birindeyse bunlara uygun a_i'lerin toplamı veya
farkı 10'a bölünür. b_i'lerden herhangi üç tanesi, örneğin b_k, b_n, b_m $\{0,5\}$
kümesindeyse bunlardan iki tanesi çakışacaktır. Örneğin $b_k=b_n$ ise $10|a_k-a_n$
olur. $n\geq 7$ ise güvercin yuvası ilkesinden dolayı $\{1,9\},\{2,8\},\{3,7\},\{4,6\}$
kümelerinde birden fazla b_i bulunacak yada $\{0,5\}$ kümesinde ikiden fazla
bulunur. Her iki durumda da toplamları ve farklarıda 10 ile bölünen iki a_i
bulunacağından $n=6$ için 0,1,2,3,4,5 istenen durumu sağlamaz. Cevap $n=7$ olur.

13.

·) $b=ka$ ve $c=ma$ alınırsa $\Rightarrow$ $\left.\begin{matrix} b+a>c \Rightarrow k+1>m \\ c+a>b \Rightarrow m+1>k \end{matrix}\right\} \Rightarrow m+2>k+1>m$, $k+1 \in N$

$\Rightarrow k+1=m+1$ ve $\Rightarrow$ $k=m$ olur. ABC'nin ikizkenar üçgen olduğu görülür.

14.

$p\neq 2, q\neq 2$. olduğu görülebilir.

$p\neq 3$, aksi halde $3 \mid p+6$. olur.

$p\neq 3k+2$, $k\in \mathbb{N}$, aksi halde $3 \mid p+10$. olur.

O halde p, $3k+1$ formundadır.

$q\neq 3m+1$, aksi halde $3 \mid p+q+1$.

$q\neq 3m+2$, aksi halde $3 \mid q+4$

O halde ~~q=3 tür formundadır~~. $q=3$'tür.

$2\leqslant p<100$ koşulunu sağlayan ve $p=3k+1$ formundaki

asalları arıyoruz. $p=\{7,13,19,31,37,43,61,67,73,79,97\}$ olabilir.

p'nin son rakamı 1, 5 ve 9 olamaz, aksi halde $p+6$,

$p+10$, $p+4$ sayılarından en az biri asal değildir.

p'nin son rakamı 3 veya 7 olabilir. Bu durumda

~~p={13, 23, 43, 53, 73, 83, 7, 17, 37, 47, 67, 97}.~~ $p=\{7,13,37,43,67,73,97\}$ olabilir

~~p+4 asaldır ⇒ p≠ 23, 53, 73, 87, 17, 47.~~

~~p+6 asaldır ⇒ p≠43~~

~~p+10 asaldır ⇒ p≠ 23, 53, 83, 13, 47, 67.~~

$p=73$ için $p+4$ asaldır.

$p=43$ için $p+6$ asaldır.

$p=67$ için $p+10$ asaldır.

istenen ikililer

$\Rightarrow (p,q)=\{(13,3),(7,3),(37,3),(97,3)\}$ olmak üzere 4 adettir. bulunur.

15.

y) $x=\frac{a}{a-b}$, $y=\frac{b}{b-c}$, $z=\frac{c}{c-a}$ denirse,

$$(x-1)(y-1)(z-1)=\frac{b}{a-b}\cdot\frac{c}{b-c}\cdot\frac{a}{c-a}=xyz \quad \text{olur.}$$

Buradan, $x+y+z=xy+yz+xz+1$.

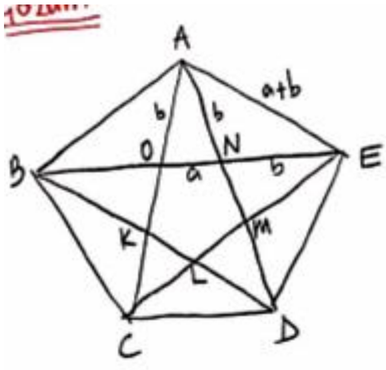
$$\left(\frac{2a-b}{a-b}\right)^2+\left(\frac{2b-c}{b-c}\right)^2+\left(\frac{2c-a}{c-a}\right)^2=(1+x)^2+(1+y)^2+(1+z)^2$$
$$=3+x^2+y^2+z^2+2(x+y+z)$$
$$=3+x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+xz+1)$$
$$=5+(x+y+z)^2\geq 5$$

$a=2d$, $b=0$, $c=d$, $0\neq d\in\mathbb{R}$ seçilirse istenen ifadenin 5 olduğu görülür.

16.

r-) ~~Tüm sınıflarda eşit sayıda öğrenci olduğunu~~ gösterelim.
~~Aksini varsayalım. Bu durumda~~ öğrenci sayısı farklı olan X ve Y gibi iki sınıf ~~vardır~~ olsun. X'teki öğrenci sayısını Y'den büyük alabiliriz.
X'teki öğrenci sayısı Y'den büyük olduğundan X'ten en az iki kişi Y'den aynı kişiyi tanıyacak tır (Güvercin yuvası ilkesi).
Y'deki bu kişi X'ten iki kişiyi tanıyor. ~~Çelişki~~. Sorunda verilen şart gerçekleşmez. Bu durumda $X=Y$ olduğu görülebilir. Tüm sınıflarda eşit sayıda öğrenci vardır. Fark 0 olur.

17.



$\overset{\triangle}{BAE}$, $\overset{\triangle}{ANE}$ ve $\overset{\triangle}{OAN}$ ikizkenar üçgenlerdir.

$|ON| = a$ ve $|NE| = b$ alınırsa

$|AO| = |AN| = |NE| = b$ ve $|AE| = a+b$ olur.

$\overset{\triangle}{OAN} \sim \overset{\triangle}{AEO}$ kullanılırsa

$\frac{a}{b} = \frac{b}{a+b}$, $b^2 - ab - a^2 = 0$ ve

bu denklem b'ye bağlı ikinci derece denklem olarak görülürse

$b = \frac{a \pm \sqrt{(-a)^2 - 4.1.(-a^2)}}{2} = \frac{a + a\sqrt{5}}{2}$ olur

$|AE| = a + \frac{a(1+\sqrt{5})}{2} = \frac{a(3+\sqrt{5})}{2}$ dir.

KLMNO ve ABCDE çokgenlerinin benzerliğinden

$$\frac{x}{A(ABCDE)} = \left(\frac{a}{\frac{a.(3+\sqrt{5})}{2}}\right)^2$$

$A(ABCDE) = \frac{7+3\sqrt{5}}{2}.x$ bulunur.

18.

P5) Sayı $P = abcba$ olsun.

$P = 10001a + 1001b + 100c = 37(270a + 27b + 3c) + 11(a+b-c)$

$-8 \leqslant a+b-c \leqslant 18$, $37 | a+b-c$ olması için $\Rightarrow a+b-c = 0$ olmalıdır.

$a > 0$,

$c = a+b$, $c \geqslant 1$.

$c = 1 \Rightarrow 1$ sayı vardır.

$c = 2 \Rightarrow 2$ sayı vardır.

$\vdots$

$c = 9 \Rightarrow 9$ sayı vardır

$1 + 2 + \ldots + 9 = 45$ sayı vardır.

19.

7

$x^3+y^3-p = x^3+y^3-x^2y-xy^2 = x^2(x-y)-y^2(x-y)$

$= (x-y)^2(x+y) \geq 0$

$\Rightarrow x^3+y^3 \geq p$. x, y olduğundan x^3+y^3 ifadesinin en küçük değeri p'dir.

$x=y=\left(\frac{p}{2}\right)^{1/3}$ yalnızcak $\Rightarrow x^3+y^3=p$. eşitliği görülür.

20.

Sayıyı üç parçaya ayıralım.

ab, cd, ef

Toplam çift ise $\underline{Ç+Ç+Ç=Ç}$ 1 durum

$T+T+Ç=Ç$ ~~3 durum~~ vardır. $\frac{3!}{2!}=3$ durum vardır.

a.b'nin tek olması durumu $5.5=25$

a.b'nin çift olması durumu $9.9-5.5=56$

Sonuç $= 56^3+3.56.25^2 = 56^2(56+3.5^4) = 6055616$.

21.

ABC üçgeninin alanına A, yüksekliklere h_a, h_b, h_c dersek

$2A = a.h_a = b.h_b = c.h_c$.

$h_c = h_a+h_b \Rightarrow \frac{2A}{c} = \frac{2A}{a}+\frac{2A}{b}$

$\frac{1}{c} = \frac{1}{a}+\frac{1}{b} \Rightarrow ab-(bc+ac)=0.$

$a^2+b^2+c^2 = a^2+b^2+c^2+2[ab-(bc+ac)] = (a+b-c)^2$

$\Rightarrow a^2+b^2+c^2$ tamkare olmalıdır. Cevap 25 olabilir.

22.

$1+2+...+n = \frac{n(n+1)}{2}$

$2n+1 \mid \frac{n(n+1)}{2} \Rightarrow \frac{n(n+1)}{2} = k(2n+1) \Rightarrow 4n(n+1) = 8k(2n+1)$

$(2n+1)^2-1 = 8k(2n+1) \Rightarrow (2n+1)(2n+1-8k)=1$ hiçbir n ve k pozitif tamsayıları için bu eşitlik sağlanmaz.

23.

$x=y=1$ alınırsa $\Rightarrow 2f(1)=2f(1)^3 \Rightarrow f(1)=0$ veya $f(1)=1$. bulunur.

$0 \notin \mathbb{R}^+$ olduğundan $\Rightarrow f(1)=1$. olur.

$y=1$ için $x+f(x)=f(x)[f(x)+1]$ ve $f(x)=\sqrt{x}$ dir.

$\Rightarrow$ ~~$f(4)=\sqrt{4}$~~ $f(4)=2$. bulunur.

24.

$a_1<a_2<a_3<a_4<a_5$ kabul edelim. $1\le 2\le 5\le 7\le 12$

a_i-a_j farkları $\binom{5}{2}=10$ tanedir.

a_i-a_j farkları aynı ~~olamayacağı~~ olamayacağı için $\Rightarrow a_5 \geq 11$. olmalıdır.

$a_5=11$ olsaydı, a_i-a_j farkları $1,2,\dots,10$ olacaktı.

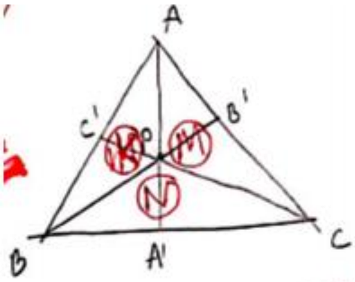
$$55 = 1+2+3+\dots+10 = (a_5-a_4)+(a_5-a_3)+(a_5-a_2)+(a_5-a_1)$$
$$+(a_4-a_3)+(a_4-a_2)+(a_4-a_1)$$
$$+(a_3-a_2)+(a_3-a_1)$$
$$+(a_2-a_1)$$
$$=4a_5+2a_4-2a_2-4a_1$$

Sol taraf tek, sağ taraf çift. ~~Çelişki~~ olduğu görülür. Buradan çelişki elde ederiz.

$a_5=12$ için çözüm var. $\{1,3,8,11,12\}$. olduğu görülür.

Bu çözümün

25.



$A(\widehat{ABP})=K$, $A(\widehat{APC})=M$ ve $A(\widehat{BPC})=N$

olarak alınırsa

~~$\frac{|AP|}{|PA'|}=\frac{K+M}{N}$, $\frac{|BP|}{|PB'|}=\frac{K+N}{M}$, $\frac{|PC|}{|PC'|}=\frac{M+N}{K}$~~

$$x=\frac{|AP|}{|PA'|}=\frac{k+m}{n},\quad y=\frac{|BP|}{|PB'|}=\frac{k+n}{m} \quad \text{ve} \quad z=\frac{|PC|}{|PC'|}=\frac{m+n}{k}$$

verilen eşitlikte yerine yazılırsa

$$=\frac{k+m}{n}\cdot\frac{k+n}{m}\cdot\frac{m+n}{k}-\left(\frac{k+m}{n}+\frac{k+n}{m}+\frac{m+n}{k}\right)$$

$$=\frac{2mnk}{mnk}=2 \text{ dur.}$$

P noktası ağırlık merkezi olarak kabul edilirse istenen sonuca daha hızlı ulaşmak mümkündür.

26.

27) $3y^2 = x(x^3+1)$

$(x^3+1, x) = 1$ olduğu için iki durum olabilir:

$y = u.v$ için i) $3u^2 = x^3+1$, $v^2 = x$

ii) $u^2 = x^3+1$, $3v^2 = x$

i) durumunda $x^3+1 = 3u^2 \equiv 0 \pmod 3 \Rightarrow x \equiv 2 \pmod 3$

$2 \equiv x \equiv v^2 \pmod 3$ olamaz.

ii) durumunda $x = 3v^2 \equiv 0 \pmod 3$

$u^2 = x^3+1 = (x+1)(x^2-x+1)$

$x^2-x+1 = (x+1).(x-2)+3 \Rightarrow (x^2-x+1, x+1) = (3, x+1) = 1.$

$x^2-x+1 = t^2$ eşitliğini sağlayan bir t pozitif tamsayısı vardır.

$x = 1$ için çözüm ver, fakat $1 \not\equiv 0 \pmod 3$

$x > 1 \Rightarrow (x^2-x+1) - x < x^2-x+1 < (x^2-x+1)+(x-1)$

$\Rightarrow (x-1)^2 < x^2-x+1 < x^2$ olamaz.

$\Rightarrow$ Verilen denklemin tamsayılarda çözümü yoktur.

27.

$\dfrac{5x-6-x^2}{2} \geqslant 0 \Rightarrow (x-2)(x-3) \leqslant 0$

$\Rightarrow 2 \leqslant x \leqslant 3$

$1+(x-5)(x-7) = x^2-12x+36 = (x-6)^2$

$\Rightarrow \sqrt{1+(x-5)(x-7)} = |x-6| = 6-x$ ($2 \leq x \leq 3$ olduğundan)

$4-(x-2)(6-x) = x^2-8x+16 = (x-4)^2$

$\Rightarrow \sqrt{4-(x-2)(6-x)} = |x-4| = 4-x$

$4-x(4-x) = x^2-4x+4 = (x-2)^2$

$\Rightarrow \sqrt{4-x(4-x)} = |x-2| = x-2$

$\Rightarrow$ Denklemin sol tarafı $x-2$'ye eşittir.

$x-2 = \dfrac{5x-6-x^2}{2} \Rightarrow x^2-3x+2 = 0$

$(x-1)(x-2) = 0$ $x = \{1, 2\}$ olduğu görülür.

ise $2 \leqslant x \leqslant 3$ olduğundan $\Rightarrow x = 2$ tek çözümdür.

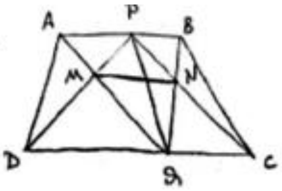
28.

$x_k y_k = 1 \Rightarrow S_k = \frac{1}{1-x_k^3} + \frac{1}{1-y_k^3} = \frac{1}{1-x_k^3} + \frac{1}{1-\frac{1}{x_k^3}}$

$$= \frac{1-x_k^3}{1-x_k^3} = 1$$

$\Rightarrow S = S_1 + S_2 + \dots + S_{2010} = 2010.$

29.



) Önce $[MN]$'nin $[AB]$'ye paralel olduğunu gösterelim.

APM ve QDM üçgenleri benzerdir.

$\Rightarrow \frac{|PM|}{|MD|} = \frac{|AP|}{|DQ|}$

PBN ve CQN üçgenleri benzerdir. $\Rightarrow \frac{|PN|}{|NC|} = \frac{|PB|}{|QC|}$

$\frac{|AP|}{|PB|} = \frac{|DQ|}{|QC|}$ olduğunu biliyoruz $\Rightarrow \frac{|PM|}{|MD|} = \frac{|PN|}{|NC|}$

Thales Teoreminden $[MN] \parallel [AB]$ elde ederiz.

$\frac{|MN|}{|DC|} = \frac{|PM|}{|PD|}$ ve $\frac{|MN|}{|AB|} = \frac{|QM|}{|QA|}$ eşitlikleri taraf tarafa toplanırsa

$\frac{|MN|}{y} + \frac{|MN|}{x} = 1$, $|MN| \cdot \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{x}\right) = 1$ ve $|MN| = \frac{x \cdot y}{x+y}$ bulunur.

30.

$S(n)$, n'nin kendisinden küçük en büyük böleni olduğundan

$p = \frac{n}{S(n)}$ bir asal sayıdır.

n'nin basamak sayısını k ile gösterirsek. $S(n)$'in her asal böleni p'den büyük veya eşittir O halde $S(n) \geq p$ ve

$[S(n)]^2 \geq p \cdot S(n)$, $10^{k-1} \leq n \leq [S(n)]^2 \leq (9k)^2$, $k \leq 4$ bulunur.

a) $k = 4$ için, $n = abcd$, $n \leq S(n)^2 \leq 36^2 = 1296$, $a = 1$, $S(n) \leq 28$

$n \leq 28^2 < 1000$ çelişki elde edilir.

b) $k \leq 3$, $n = \overline{abc}$ (burada a ve b rakamları sıfır olabilir)

$9(11a+b) = (p-1)(a+b+c)$

$9 \mid p-1$ ve $p < s(n) = a+b+c = 27$, $p = 19$, $9a = b+2c \leq 27$ ve $a \leq 3$ olur.

$a+b+c$'nin 19'dan küçük asal böleni olmadığından $a+b+c = 19$ veya $a+b+c = 23$ olabilir. Birinci durumda $11a+b = 38$, $a=3, b=5$ ve $c = 11$ olur, bu çelişkidir. İkinci durumda $a \leq 3$'den dolayı $b+c \geq 20$ oluyor bu da çelişkidir.

$9 \nmid p-1$, $3 \mid a+b+c$, $p = 2$ veya $p = 3$ olur.

$p = 3$ için $n = 3(a+b+c)$, $a = 0$

$n = 10b + c = 3(b+c)$

$7b = 2c$, $n = 27$

$p = 2$ için $n = 2(a+b+c)$, $a = 0$

$8b = c$, $n = 18$ bulunur.

İstenen şartı sağlayan sayılar 27 ve 18'dir. Cevap $27 + 18 = 45$ bulunur.

31.

) $x > 0$, $n \in \mathbb{N} \rightarrow 0 \leq \left(\sqrt{x^n} - \frac{1}{\sqrt{x^n}}\right)^2 = x^n + \frac{1}{x^n} - 2$

$\rightarrow x^n + \frac{1}{x^n} \geq 2$, $x + \frac{1}{x} \geq 2$ ve $x^2 + \frac{1}{x^2} \geq 2$ olur.

$ab, ac, bc > 0$

$$\rightarrow P(x) \cdot P\left(\tfrac{1}{x}\right) = (ax^2+bx+c)\left(a\frac{1}{x^2} + b \cdot \frac{1}{x} + c\right)$$

$$= a^2+b^2+c^2 + ab\left(x+\tfrac{1}{x}\right) + bc\left(x+\tfrac{1}{x}\right) + ca\left(x^2+\tfrac{1}{x^2}\right)$$

$$\geq a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$$

$$= (a+b+c)^2$$

$$= [P(1)]^2.$$

32.

) İstediğimiz kelimeler arasında A ile bitenlerin sayısına a_n, B ile bitenlerin sayısına b_n dersek $p_n = a_n + b_n$ olur.

$n \geqslant 4$ için istediğimiz sözcük A ile bitiyorsa son harfler BA, BAA veya BAAA'dır.

$$\Rightarrow a_n = b_{n-1} + b_{n-2} + b_{n-3}$$

Benzer şekilde $n \geqslant 3$ için istediğimiz sözcük B ile bitiyorsa AB veya ABB ile biter.

$$\Rightarrow b_n = a_{n-1} + a_{n-2}$$

$n \geqslant 6$ için

$$a_n = b_{n-1} + b_{n-2} + b_{n-3} = (a_{n-2} + a_{n-3}) + (a_{n-3} + a_{n-4}) + (a_{n-4} + a_{n-5})$$

$$= a_{n-2} + 2a_{n-3} + 2a_{n-4} + a_{n-5},$$

$$b_n = a_{n-1} + a_{n-2} = (b_{n-2} + b_{n-3} + b_{n-4}) + (b_{n-3} + b_{n-4} + b_{n-5})$$

$$= b_{n-2} + 2b_{n-3} + 2b_{n-4} + b_{n-5}$$

$p_n = a_n + b_n$ olduğundan

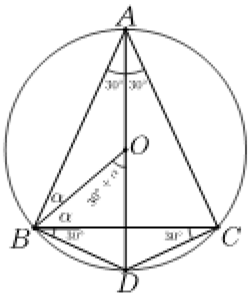
$$p_n = p_{n-2} + 2p_{n-3} + 2p_{n-4} + p_{n-5}$$

$$\rightarrow \frac{p_n - p_{n-2} - p_{n-5}}{p_{n-3} + p_{n-4}} = 2$$

$n = 2010$ için $\dfrac{p_{2010} - p_{2008} - p_{2005}}{p_{2007} + p_{2006}} = 2$'dir.

TARIK DENEME ÇÖZÜMLER

1.



BDO üçgeni $30°, 30°, 120°$ üçgenidir.
$|BD| = |DC| = 6$.
BDO ikizkenar $|BD| = |DO| = 6$.

Cevap: E

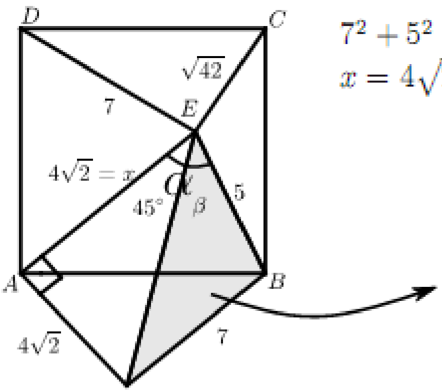
2. $x + xy + xyz = 31 \Rightarrow x \cdot (1 + y + yz) = 31 \Rightarrow 1 + y + yz > 1$ olduğundan $x = 1$ ve $1 + y + yz = 31 \Rightarrow y(1 + z) = 30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$'dir. $z + 1 > 1$ olduğundan 30'u bölen $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ tane pozitif tam sayıdan $z + 1$ çarpanı 7 farklı değer alır. Şimdi tüm çözümleri yazalım. (x, y, z) için $(1,1,29), (1,2,14), (1,3,9), (1,5,5), (1,6,4), (1,10,2), (1,15,1)$ çözümleri vardır. **Cevap: C**

3. $Q(x)$ ve $H(x)$ in bir kökü ortak olmalıdır. Bu köke t diyelim. $Q(t) = H(t)$ olacağından $t^2 + 2t + a = t^2 - t + b \Rightarrow t = \dfrac{b-a}{3}$ olur. Ayrıca $P(x) \cdot (x - t) = Q(x) \cdot H(x)$ olmalıdır. $(x^3 + 3x^2 + cx - 8) \cdot (x - t) = (x^2 + 2x + a) \cdot (x^2 - x + b)$ polinomlarının eşitliğinde x^3 ün katsayısı 1 olacağından $t = 2$ bulunur. $t = 2 \Rightarrow a = -8$, $b = -2$ ve $c = -6 \Rightarrow P(1) = 1 + 3 - 6 - 8 = -10$. **Cevap: B**

4. Betül'ün her zaman kazanabileceğini gösterelim. Aynı sütunda bulunan ve aralarında tam bir hane bulunan iki haneye "eşlenik haneler" diyelim. Örneğin şekilde A'nın eşleniği A', B'nin eşleniği de B''dür. Betül her hamlesinde Ali'nin son hamlesinde boyadığı hanenin eşleniğini boyasın. Betül'ün her hamlesinden sonra ilk iki satır son iki satırla aynı olacak, dolayısıyla Ali hamle yapabiliyorsa Betül de yapabilir. O halde ilk olarak Ali'nin hamleleri tükenecek. **Cevap: A**

		B'		
A				
		B		
A'				

5.



$$7^2 + 5^2 = \sqrt{42}^2 + x^2$$
$$x = 4\sqrt{2}$$

Cosinüs teoreminden
$\beta = 60°$
$\alpha = 45° + 60° = 105°$

Cevap: D

6. a, b, c asal rakam olmak üzere $n = abc = 100a + 10b + c$ olmalıdır. n^2 beş basamaklı olacağından $n^2 < 10^5$ dir. Buradan $n < 320$ olduğu hemen görülebilir. n için a, b ve c rakamları en az olacağından ve $abc \leq 320$ olduğundan $a = 2$ ve $10b + c \geq 22$ olmalıdır. $c = 2, 3, 5, 7$ değerlerini alabileceği için n^2 nin birler basamağı $4, 9, 5, 9$ olup asal olması gerektiğinden $c = 5$ olur. $n = 2b5$ olduğundan $225, 235, 255, 275$ sayılarının karelerinin sırasıyla $n^2 = 50625, 55225, 65025, 75625$ olup asal kökenli sayı olması gerektiğinden $n^2 = 55225$ bulunur.

$$n^3 = n \cdot n^2 = 235 \cdot 55225 \equiv ? \pmod{2020}$$

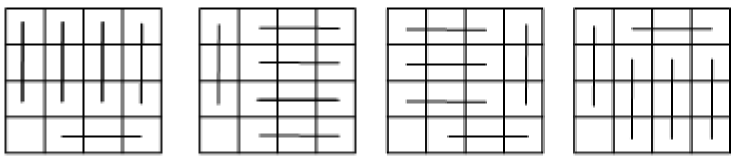
arıyoruz. $2020 = 101 \cdot 20$ olduğundan $n^3 = 33 \cdot 79 \equiv 3 \cdot 869 \equiv 3 \cdot 61 \equiv 183 \equiv 82 \pmod{101}$ bulunur. Benzer şekilde $n^3 \equiv 15 \cdot 5 \equiv 15 \pmod{20}$ bulunur. Dolayısıyla $n^3 = 101 \cdot k + 82 \equiv 20t + 15 \pmod{2020}$ $\quad (k, t \in \mathbb{Z}^+)$ olacağından k sayısı için kalanın birler basamağını 5 yapabilmek için sırasıyla 3 ve 13 denenir. Buradan $n^3 = 101 \cdot 13 + 82 = 1395 \pmod{2020}$ bulunur. **Cevap: D**

7. $$\frac{1}{x^2 + 2yz - xy - xz - yz} + \frac{1}{y^2 + 2xz - xy - xz - yz} + \frac{1}{z^2 + 2xy - xy - xz - yz}$$
$$= \frac{1}{x^2 + yz - xy - xz} + \frac{1}{y^2 + xz - xy - yz} + \frac{1}{z^2 + xy - xz - yz}$$
$$= \frac{1}{x(x-y) - z(x-y)} + \frac{1}{y(y-z) - x(y-z)} + \frac{1}{z(z-x) - y(z-x)}$$
$$= \frac{1}{(x-y)(x-z)} + \frac{1}{(y-z)(y-x)} + \frac{1}{(z-x)(z-y)}$$
$$= \frac{1}{(x-y)(x-z)} - \frac{1}{(x-y)(y-z)} + \frac{1}{(x-z)(y-z)} \text{ payda eşitleyelim.}$$
$$= \frac{(y-z) - (x-z) + (x-y)}{(x-y)(y-z)(x-z)} = 0.$$
Cevap: D

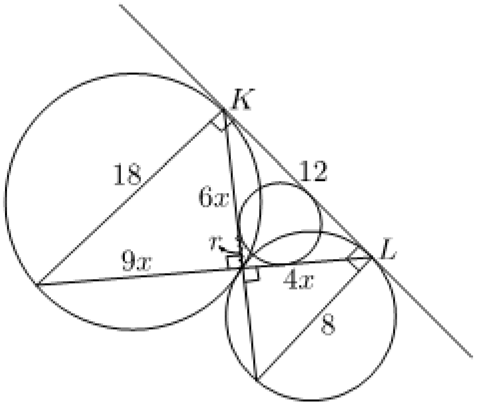
8. Tahtayı iki şekilde 3 renge boyayalım (sağdaki şekil). 3×1 boyutlu her dikdörtgen 3 farklı renkte haneyi kapatacak. 1'lerin sayısı daha fazla olduğundan kapanmayan hane hep 1 renginde olacak. O halde kapanmayan haneler sadece köşelerdeki 4 haneden biri olabilir. Sol alt köşenin kapanmadığı durumlar aşağıdaki 4 şekilde olabilir. Diğer 4 durumda da 4'er şekil oluşacak. **Cevap: A**

1	2	3	1
2	3	1	2
3	1	2	3
1	2	3	1

1	3	2	1
3	2	1	3
2	1	3	2
1	3	2	1



9.



$$u = \frac{4x + 6x + 12}{2} = 5x + 6$$

$$r = u - 12 = 5x - 6$$

$$(4x)^2 + (6x)^2 = 12^2$$

$$x = \frac{6}{\sqrt{13}}$$

$$r = \frac{30}{\sqrt{13}} - 6$$

Cevap: A

10. $(6^x - y)^2 = 6^x \cdot 6 - y \Rightarrow (6^x - y)^2 - (6^x - y) = 5 \cdot 6^x \Rightarrow (6^x - y)(6^x - y - 1) = 5 \cdot 6^x$ bulunur. a ile $a-1$ aralarında asal olduğundan denklemi iki durumda inceleyebiliriz.

1. durum: 2^x ve 3^x aynı çarpanda olabilir. $a = 6^x$ ve $(a-1) = 5$ ise $a = 6$ ve $x = 1$ olup $(x,y) = (1,0)$ çözümü elde edilir. $a = 5$ ve $a - 1 = -6^x$ ise $x = 1$ olup $(x,y) = (1,11)$ çözümü elde edilir.

2. durum: 2^x ve 3^x farklı çarpanlar olabilir. $a = 3^x$ ve $a - 1 = 5 - 2^x$ ise $a = 81$ ve $x = 4$ olup $(x,y) = (4,1215)$ çözümü elde edilir. $a = -5 \cdot 2^x$ ve $a - 1 = -3^x$ ise $a = -80$ ve $x = 4$ olup $(x,y) = (4,1376)$ çözümü elde edilir. Diğer taraftan $2^x, 3^x$ ve 5 çarpanları negatif olmayan x tam sayıları için incelendiğinde başka çözüm gelmez. Dolayısıyla 4 farklı (x,y) tam sayı ikilisi elde edilir. **Cevap: B**

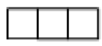
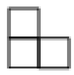
11. Simetrik olayından $x \geq y \geq z$ olduğunu varsayalım.

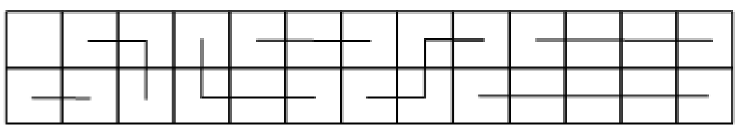
$$x^2 - yz = y - z + 1 \qquad (1)$$
$$y^2 - zx = x - z + 1 \qquad (2)$$
$$z^2 - xy = x - y + 1 \qquad (3)$$

(1)-(2) ve (2)-(3) den

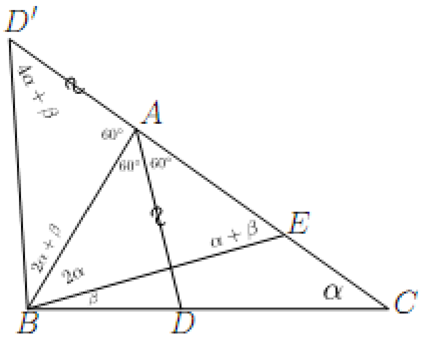
$$(x-y)(x+1+z+1) = 0$$
$$(y-z)(x+y+z-1) = 0$$

elde edilir. Buradan $x = y > z$ ve $x+y+z = 1$ veya $x > y = z$ ve $x+y+z = -1$ ise $(x,y,z) = \left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}, -\frac{5}{3}\right), \left(-\frac{5}{3}, \frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right), \left(\frac{4}{3}, -\frac{5}{3}, \frac{4}{3}\right), \left(\frac{5}{3}, -\frac{4}{3}, -\frac{4}{3}\right), \left(-\frac{4}{3}, -\frac{4}{3}, \frac{5}{3}\right), \left(-\frac{4}{3}, \frac{5}{3}, -\frac{4}{3}\right)$ olduğundan 6 tane olur. **Cevap: E**

12. Alanı 1 ve 2 olan birer çokmino, alanı 3 olan 2 çokmino var:  ,  .
O halde 8 çokminodan oluşan bir şeklin alanı $1 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 4 \cdot 4 = 25$'ten az değildir. Fakat alanı 25 ve kare olmayan bir dikdörtgen sadece 25×1 boyutlu olabilir. Böyle bir dikdörtgen sadece $k \times 1$ şeklinde çokminolardan oluşabilir, bunların alanı da en az $1 + 2 + \cdots + 8 = 36 > 25$ olur. O halde dikdörtgenin alanı 26'dan küçük değildir. Alanı 26 olan 13×2 boyutlu dikdörtgen aşağıdaki şekilde bölünebilir. **Cevap: B**



13.



ABD ile ABD' eş üçgenler,
$3\alpha + \beta = 60°$
$|ED'| = |BE| = 9$

Cevap: C

14. $(n, 2^n - 1) = 3$ olduğundan $n \equiv \ \pmod 3$ ve $2^n \equiv 1 \pmod 3$ olmalıdır. Fermat teoremi gereği n çift tam sayı olmalıdır. Dolayısıyla $n = 6k, k \in Z$ dir. Şimdi her $n = 6k$ tipindeki sayıların $(n, 2^n - 1) = 3$ olmasını sağlamadığını görelim.

i) $2^n - 1 \equiv 0 \pmod 5 \Rightarrow 2^n \equiv 1 \pmod 5$ ve Fermat teoremi gereği $n \equiv 0 \pmod 4$ ve $n \equiv 0 \pmod 5$ olursa $(n, 2^n - 1) \neq 3$ olacağından $n \not\equiv 0 \pmod{20}$ olur ki $n \neq 60$ bulunur.

ii) $2^n - 1 \equiv 0 \pmod 7 \Rightarrow 2^n \equiv 1 \pmod 7$ ve Fermat teoremi gereği $n \equiv 0 \pmod 6$ ve $n \equiv 0 \pmod 7$ olursa $(n, 2^n - 1) \neq 3$ olacağından $n \not\equiv 0 \pmod{42}$ olur ki $n \neq 42$ ve $n \neq 84$ bulunur.

iii) $2^n - 1 \equiv 0 \pmod 9 \Rightarrow 2^n \equiv 1 \pmod 9$ ve $n \equiv 0 \pmod 6$ olup $n \equiv 0 \pmod 9$ olursa $n \not\equiv \ \pmod{18}$ olur ki $n \notin \{18, 36, 54, 72, 90\}$ bulunur. Dolayısıyla $\sum_{k=1}^{16} 6k - (60 + 42 + 84 + 16 + 36 + 54 + 72 + 90) = \frac{6 \cdot 16 \cdot 17}{2} - 456$. n tam sayılarının toplamı 360 olur.
Cevap: A

15. $(x^4 + x^2 + 1)(y^4 + y^2 + 1) = (xy)^4 + x^2 \cdot (xy)^2 + y^4 + y^2(xy)^2 + (xy)^2 + x^2 + y^4 + y^2 + 1$
$= 9 + 3x^2 + x^4 + 3y^2 + 3 + x^2 + y^4 + y^2 + 1 = 13 + x^4 + y^4 + 4x^2 + 4y^2$
$x^4 + y^4 + 4x^2 + 4y^2 = A \Rightarrow$ A.G.O eşitsizliğinden $\dfrac{A}{4} \geq \sqrt[4]{16x^6y^6} \Rightarrow A \geq 8\sqrt[4]{27}$ ise istenen ifadenin en küçük değeri $13 + 8\sqrt[4]{27}$ dir. **Cevap: E**

16. Tahtadaki sayılar şöyle olacak:

$$m, n \longrightarrow m + n, \quad n - m \longrightarrow 2n, \quad 2m \longrightarrow 2(n + m), 2(n - m), \ldots$$

Buradan ikinci adımdan sonra yazılan sayıların hepsinin çift sayı olacağı bariz şekilde ortaya çıkıyor. O halde $m, n, m + n, n - m$ sayılarından bir 2021 olmalı.

1. durum: $m = 2021 \Rightarrow n > m = 2021$

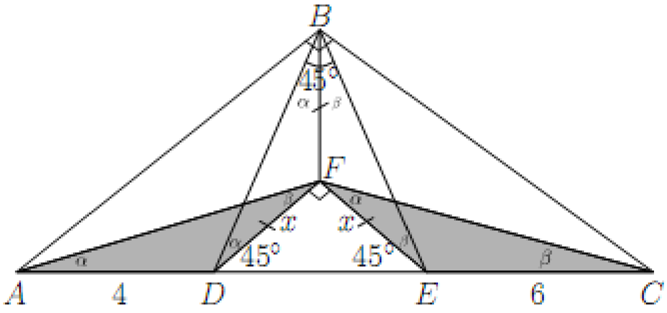
2. durum: $n = 2021$

3. durum: $m + n = 2021 \Rightarrow 2n > m + n = 2021 \Rightarrow n \geq 1011$

4. durum: $n - m = 2021 \Rightarrow n = m + 2021 > 2021$

Bu durumda n'nin alabileceği en küçük değer 1011 oluyor. Gerçekten $m = 1010$, $n = 1011$ alırsak $m + n = 2021$ olur. **Cevap: D**

17.



$ADFB$ ve $BFEC$ kirişler dörtgenidir.

F, ADE nin çevrel çemberinin merkezidir $|BF| = |DF| = |FE|$ olur. ADF ile FEC benzer olup $x = |BF| = 2\sqrt{6}$.

Cevap: D

18. $n = 1$ için $x_1^2 - 2 \equiv 0 \pmod 7 \Rightarrow x_1^2 \equiv 2 \pmod 7 \Rightarrow x_1 = 3$.

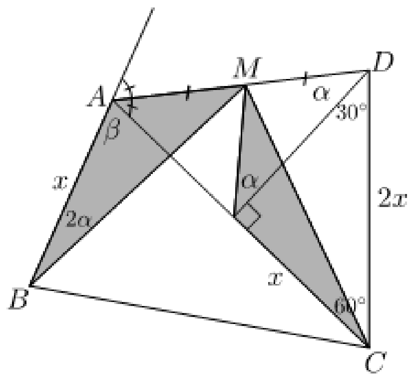
$n = 2$ için $x_2^2 - 2 \equiv 0 \pmod{49} \Rightarrow x_2^2 \equiv 2 \pmod 7 \Rightarrow x_2 = 7k + 3$ veya $x_2 = 7k + 4$, $k \in \mathbb{Z}$ olacağından x_2 en az 10 bulunur. $x_2 = 10$ $(10^2 - 2 = 98 \equiv 0 \pmod{49})$.

$n = 3$ için $x_3^2 - 2 \equiv 0 \pmod{7^3} \Rightarrow x_3^2 \equiv 2 \pmod{343}$ olmalıdır. Fakat şimdi önceki bulguları geliştirmemiz gerekiyor. $x_3^2 \equiv 2 \pmod 7$ olacağından $x_3 = 7k+3$ veya $x_3 = 7k+4$, $k \in \mathbb{Z}$ olması gerektiğini biliyoruz. Aynı zamanda $x_3^2 \equiv 2 \pmod{49}$ olması gerektiğinden $(7k + 3)^2 \equiv 2 \pmod{49} \Rightarrow 42k + 9 \equiv 2 \pmod{49} \Rightarrow 42k \equiv -7 \pmod{49} \Rightarrow 42k \equiv 42 \pmod{49} \Rightarrow k \equiv 1 \pmod 7 \Rightarrow k = 7t + 1$, $t \in \mathbb{Z}$ olup $x_3 = 7(7t + 1) + 3 = 49t + 10$ tipinde olabilir. Ayrıca $(7k + 4)^2 \equiv 2 \pmod{49} \Rightarrow 7k + 16 \equiv 2 \pmod{49} \Rightarrow 7k \equiv 35 \pmod{49} \Rightarrow k \equiv 5 \pmod 7 \Rightarrow k = 7a + 5, a \in \mathbb{Z}$ olup $x_3 = 7 \cdot (7a + 5) + 4 = 49a + 39$ tipinde olabilir. Bu iki durumdan hangisi için x_3 en küçük değerini alacaktır? $(49k + 10)^2 \equiv 49 \cdot 10 \cdot 2 \cdot k + 100 \equiv 2 \pmod{343} \Rightarrow 20k \equiv -2 \pmod 7 \Rightarrow k \equiv 2 \pmod 7$ bulunur. $x_3 = 49 \cdot 2 + 10 = 108$ olabilir. $(49a + 39)^2 \equiv 49 \cdot 39 \cdot 2 \cdot a + 39^2 \equiv 2 \pmod{343} \Rightarrow 78a \equiv -31 \pmod 7 \Rightarrow a \equiv 4 \pmod 7$ bulunur. $x_3 = 49 \cdot 4 + 39 = 235$ olabilir. $108 < 235$ olduğundan $x_3 = 108$ bulunur. Dolayısıyla $x_1 + x_2 + x_3 = 3 + 10 + 108 = 121$ olur. **Cevap: E**

19. x ifadesinde $a = 2\sqrt[6]{5}$ ve $b = 1$ dönüşümü yapıldığında $x = \frac{638}{(a^2+ab+b^2)(a^3+b^3)}$ elde edilir. Daha sonra x ifadesi $a - b$ ile genişletildiğinde $x = \frac{(a-b)\cdot 638}{a^6 - b^6} = \frac{638(a-b)}{319} = 2(a - b) = 4\sqrt[6]{5} - 2$ istenen ifadede yerine yazıldığında $\frac{(4\sqrt[6]{5}-2+2)^6}{16} = \frac{(4\sqrt[6]{5})^6}{16} = \frac{2^{12}\cdot 5}{2^4} = 1280$. **Cevap: B**

20. $a > 1$ sayısı çiftse bir adımda $\frac{a}{2} < a$ sayısına ulaşıyoruz, a tekse iki adım sonra $\frac{a+3}{2}$ sayısı elde ediliyor. $a > 3$ ise $\frac{a+3}{2} < a$. Dolayısıyla $a \neq 3$ durumunda en az 2 adımda sayı küçülüyor. O halde herhangi sayıdan başladığımızda bir süre sonra ya 1'e ulaşıyoruz (ve sonra da $1 \to 2 \to 4 \to 1$ diye tekrarlanıyor) ya da 3'e ulaşıyoruz (ve sonra da $3 \to 6 \to 3 \to \ldots$). İşlemler sırasında 3'e bölünen bir sayıdan yine 3'e bölünen bir sayı, 3'e bölünmeyen sayıdan da 3'e bölünmeyen sayı elde edilir çünkü $3 \mid a \Leftrightarrow 3 \mid \frac{a}{2}$ ve $3 \mid a \Leftrightarrow 3 \mid a + 3$. O halde $3 \mid n$ ise, 1 elde edilemez, $3 \nmid n$ ise 3 elde edilemez sayı gittikçe küçülerek 1 elde edilecek. Cevap: $3 \nmid n$ durumunda 1 elde edilecek $\Rightarrow \frac{900}{3} \cdot 2 = 600$.
Cevap: D

21.



$2 \cdot (\alpha + 30°) - \beta = 60°$
$\beta = 2\alpha$
Taralı üçgenler eştir.
$|BM| = |MC| = 7\sqrt{3}$

Cevap: B

22. c ve d pozitif tam sayı olmak üzere $3b-1=c\cdot(2a+1)$ ve $3a-1=d(2b+1)$ eşitlikleri yazılabilir. $cd=\frac{3b-1}{2a+1}\cdot\frac{3a-1}{2b+1}=\frac{3a-1}{2a+1}\cdot\frac{3b-1}{2b+1}<\frac{3}{2}\cdot\frac{3}{2}=2,25$ elde edilir. O zaman $(c,d)\in\{(1,1),(1,2),(2,1)\}$ olabilir. Dolayısıyla

- $(c,d)=(1,1)$ için $3b-1=2a+1$ ve $3a-1=2b+1$ olup $(a,b)=(2,2)$ çözümü elde edilir.
- $(c,d)=(1,2)$ için $3b-1=2a+1$ ve $3a-1=4b+2$ olup $(a,b)=(12,17)$ çözümü elde edilir.
- $(c,d)=(2,1)$ için $3b-1=4a+2$ ve $3a-1=2b+1$ olup $(a,b)=(17,12)$ çözümü elde edilir.

Dolayısıyla 3 farklı (a,b) pozitif tam sayı ikilisi bulunur. **Cevap: C**

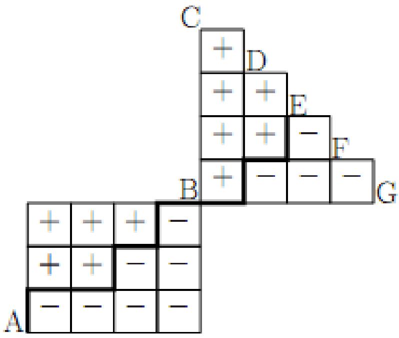
23. $f(n)=\dfrac{1}{(n+2)\sqrt{n}+n\sqrt{n+2}}=\dfrac{1}{\sqrt{n}\cdot\sqrt{n+2}(\sqrt{n+2}+\sqrt{n})}$

$f(n)=\dfrac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n}}{2\sqrt{n}\sqrt{n+2}}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}-\dfrac{1}{\sqrt{n+2}}\right)$ şeklinde düzenlenir.

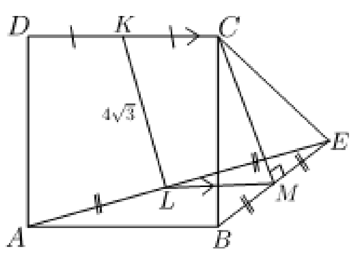
$$\begin{aligned} A&=f(1)+f(2)+\cdots+f(121)\\ &=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{1}}-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{4}}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)+\cdots+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{118}}-\frac{1}{\sqrt{120}}\right)+\\ &\qquad\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{119}}-\frac{1}{\sqrt{121}}\right)\\ &=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{120}}+\frac{1}{\sqrt{121}}\right)\\ \Rightarrow A&=\frac{1}{2}\left(\frac{10}{11}+\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{2\sqrt{30}}\right)=\frac{5}{11}+\frac{1}{2\sqrt{2}}-\frac{1}{4\sqrt{30}}\end{aligned}$$

ise istenen ifade $\dfrac{5}{11}\cdot 2024=920.$ **Cevap: B**

24. Tabloya $+$'lar ve $-$'ler yerleştirildiğinde A noktasından başlayıp hep sağa veya yukarıya doğru giderek B'den geçip C, D, E, F veya G noktalarından birine ulaşan bir kırık çizginin $+$'ları ve $-$'leri birbirine ayırdığını görüyoruz (Yandaki şekle bkz.). A'dan B'ye $\binom{7}{3}=35$ değişik yolla gidilir. B'den sonra da $2^4=16$ değişik yolla devam edilebilir, çünkü C, D, E, F ve G noktalarının her birine 4 adımda gidilir, her adım da 2 yolla yapılabilir: sağa veya yukarıya: $35\cdot 16=560$. **Cevap: D**



25.



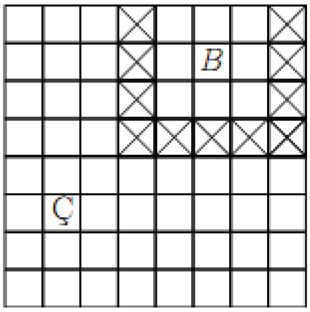
$KLMC$ paralelkenar
$|MC|=4\sqrt{3}$ ve $|CE|=8$ olur.

ABE üçgeninde cosinüs teoreminden $|AE|^2=8^2+8^2-2\cdot 8\cdot 8\cdot\cos 150^{\circ}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}=$ $128+64\sqrt{3}\Rightarrow|AE|^2=64(2+\sqrt{3})$. **Cevap: A**

26. $a = 99$ ise bir basamaklı doğal sayılar 9 tane ve iki basamaklı doğal sayılar $99 - 9 = 90$ tane olup A sayısı $9 \cdot 1 + 90 \cdot 2 = 189$ basamaklı olur. a üç basamaklı ise $n = 189 + 3k$, $k \in \mathbb{Z}$ tipindedir. Dolayısıyla $n \equiv 0 \pmod 3$ olduğundan n'nın en az 2022 olmalıdır. $2020 = 189 + 3k \Rightarrow k = 611$ bulunur. O zaman $a = 99 + 611 = 710$ olduğundan 2022 basamaklı $A = 1234\ldots709710$ bulunur. Fermat Teoremi gereği $2^{18} \equiv 1 \pmod{19}$ olduğundan $A \equiv ? \pmod{18}$ inceleyelim. $1 + 2 + 3 + \cdots + 710 = \frac{710 \cdot 711}{2} = 305 \cdot 711 \equiv 0 \pmod 9$ ve $A \equiv 0 \pmod 2$ olduğundan $A \equiv 0 \pmod{18}$ dir. O zaman A nın en küçük değeri için 2^A nın 19 ile bölümünden kalan 1 bulunur. **Cevap: B**

27. $y = 0 \Rightarrow f(f(x)) = f(f(x)) - f(0) + 1 \Rightarrow f(0) = 1$
$x = 0 \Rightarrow f(1 + y) = f(1) + 2y - f(y) + 2y^2 + 1$. Bu denklemde $y = 1$ alırsak $f(2) = f(1) + 2 - f(1) + 2 + 1 = 5$; $y = 2$ alırsak $f(3) = f(1) + 4 - 5 + 8 + 1 = f(1) + 8$; $y = 3$ alırsak $f(4) = f(1) + 6 - f(1) - 8 + 18 + 1 = 17$. **Cevap: B**

28. Merkezi A, yarıçapı n olan çemberi Ç(A, n) ile gösterelim. Bu çemberler merkezi A'da bulunan bir "kare"nin satranç tahtası ile kesişiminden oluşuyor, örneğin Ç$(B, 2)$ çemberi şekildeki taranmış bölgedir. Bu çembere teğet olan 2 yarıçaplı tek bir çember var: Ç$(C, 2)$. Buradan şöyle bir şeyi gözlemliyoruz. Ç(X, n) ve Ç(Y, n) çemberlerinin teğet olması için X ve Y noktalarının arasındaki uzaklığın $2n$ olması ve XY "doğru"sunun tahtanın köşegenlerinden birine paralel olması gerek ve yeterlidir. Köşegen üzerindeki hanelere sırayla $1, 2, \ldots, 8$ numaraları verirsek teğet çember merkezleri ikisi de tek veya ikisi de çift olmalı, dolayısıyla $\binom{4}{2} + \binom{4}{2} = 12$ yolla seçilebilir.

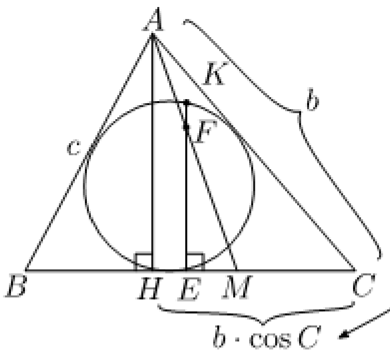


Köşegenlere paralel diğer doğrular üzerindeki ikilileri de benzer şekilde hesaplayarak

$$2 \cdot \left[\binom{4}{2} + \binom{4}{2} + 2 \cdot \left(\binom{4}{2} + \binom{3}{2} + \binom{3}{2} + \binom{3}{2} + \binom{3}{2} + \binom{2}{2} + \binom{2}{2} + \binom{2}{2} + \binom{2}{2}\right)\right]$$
$$= 2 \cdot [12 + 2 \cdot (6 + 3 + 3 + 3 + 3 + 1 + 1 + 1 + 1)] = 112$$

buluruz. **Cevap: B**

29.



$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$
$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$
$$|HC| = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2a}.$$

$$|HM| = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2a} - \frac{a}{2} = \frac{b^2 - c^2}{2a} = |HC| - |MC|.$$
$$|EM| = |EC| - |MC| = \left(\frac{a + b + c}{2} - c\right) - \frac{a}{2} = \frac{b - c}{2}.$$
$$\frac{|ME|}{|MH|} = \frac{|FM|}{|MA|} = \frac{\frac{b-c}{2}}{\frac{b^2 - c^2}{2a}} = \frac{a}{b + c} = \frac{1}{6}.$$
$$\frac{|MF|}{|MA|} = \frac{1}{6} \text{ ise } \frac{|AF|}{|FM|} = 5 \text{ olur.}$$

Cevap: D

30. $2a^2+3a-44=2p^n \Rightarrow 3a\equiv 0 \pmod 2 \Rightarrow a=2k, k\in\mathbb{Z}$ bulunur.

$$(2a+11)\cdot(a-4)=2\cdot p^n \Rightarrow (4k+11)\cdot(2k-4)=2p^n \Rightarrow (4k+11)(k-2)=p^n \quad (1)$$

$(4k+11, k-2)=(k-2,19)=d$ olduğundan $d=1$ ise $k-2=1 \Rightarrow k=3$ ve $4k+11=p^n \Rightarrow 23=p^n \Rightarrow p=23$ ve $n=1$ bulunur. Dolayısıyla $(a,p,n)=(6,23,1)$ üçlüsü bir çözümdür. $d=19$ ise $p=19$ olur. (1) denkleminde $k-2=19x, x\in\mathbb{Z}$ dersek $[4(19x+2)+11]\cdot 19x=19^n$ elde edilir. $(4x+1)\cdot x=19^{n-2}$ denklemini inceleyelim. $(4^{x+1},x)=(x,1)=1$ olduğundan $4x+1=1$ veya $x=1$ olmalı fakat bunların ikisinden de çözüm gelmez. Dolayısıyla tek çözüm $(6,23,1)$ üçlüsüdür. **Cevap: B**

31. $a_{n+1}=\dfrac{a_n^2}{a_n^2-4a_n+6}$.

1. Durum: Dizi sabit olsun. $a_1=a_2=\dfrac{a_1^2}{a_1^2-4a_1+6} \Rightarrow$ ya $a_1=0$ ya da $a_1^2-4a_1+6=a_1 \Rightarrow (a_1-3)(a_1-2)=0 \Rightarrow a_1=3$, $a_1=2$ olmalı, fakat $a_1=5$ olduğundan bunlar sağlanmaz. $a_1=5 \Rightarrow a_2=\dfrac{25}{25-20+6}=\dfrac{25}{11} \Rightarrow 2<a_2<3$

$a_3=\dfrac{\frac{625}{121}}{\dfrac{625}{121}-\dfrac{100}{11}+6}=\dfrac{625}{251} \Rightarrow 2<a_3<3$. Tümevarımla her $n\geq 2$ için $2<a_n<3$ olduğunu kanıtlayalım. $n=2$ ve 3 için doğru olduğunu gördük. $n=k$ için doğru olduğunu varsayalım. $n=k+1$ olsun. $3-a_{k+1}=3\cdots>0$, $a_{k+1}-2=\cdots>0$. Dolayısıyla $2<a_{k+1}<3$. Tümevarım bitti. Her $n\geq 2$ için $2<a_n<3 \Rightarrow 2<a_{2020}<3 \Rightarrow [\![a_{2020}]\!]=2$.

32. $a_0=25^{2021}$ olsun. Her $n=0,1,\ldots,i$ için b_n, a_n'nin son rakamı ise $(n+1)$'inci adımda elde edeceğimiz sayı

$$a_{n+1}=\frac{a_n-b_n}{10}+4b_n=\frac{a_n+39b_n}{10}\leqslant\frac{a_n}{10}+\frac{39}{10}\cdot 9 \Rightarrow a_{n+1}-39\leq\frac{a_n-39}{10}$$
$$\Rightarrow a_n-39\leq\frac{a_0-39}{10^n}.$$

Öte yandan

$$a_{n+1}=\frac{a_n+39b_n}{10}=\frac{40a_n-39a_n+39b_n}{10}=4a_n-39\cdot\frac{b_n-a_n}{10}\equiv 4a_n(\text{mod}39)$$
$$\Rightarrow a_0=25^{2021}<100^{2021}=10^{4042} \Rightarrow a_{10000}-39<\frac{a_0-39}{10^{10000}}<1$$
$$\Rightarrow a_{10000}\leqslant 39\cdot a_{10000}\equiv 4^{10000}a_0=4^{10000}\cdot 25^{2021}(\text{mod}39)$$
$$\Rightarrow a_{10000}\equiv 1(\text{mod}3) \text{ ve } a_{10000}=4\cdot 64^{3333}\cdot(-1)^{2021}$$
$$\equiv 4\cdot(-1)^{3333}\cdot(-1)^{2021}\equiv 4(\text{mod}13)$$
$$\Rightarrow a_{10000}=4(\text{mod}39) \Rightarrow a_{10000}\leq 39 \Rightarrow a_{10000}=4.$$

Cevap: A